Esercizio 1. Un'azienda produce 2 tipi di laminati (X e Y) che devono essere lavorati in 4 reparti: Assemblaggio (A), Taglio (T), Rifinitura X (RX), Rifinitura Y (RY). Le ore necessarie in ogni reparto per produrre un quintale di laminato e le disponibilitá in ore di ogni reparto sono indicate nella seguente tabella:

	A	T	RX	RY
Laminato X	30	10	20	0
Laminato Y	20	20	0	30
Disponibilitá	120	85	62	105

ORE MASSIME, DA NON SUPERARE → Disponibilitá

I 2 tipi di laminati vengono venduti rispettivamente a 8, 11 migliaia di euro al quintale.

Scrivere un modello matematico per determinare quanti quintali di laminato di ogni tipo produrre in modo da massimizzare il profitto e scrivere i comandi di Matlab. $(3.1, 1.35)$ é la soluzione ottima? Se no, utilizzarla per trovarne una migliore (non graficamente) e dire se é la soluzione ottima.
Supponiamo che la produzione dell'azienda siano fogli di laminato e che il guadagno sia ora inteso a foglio. Trovare una valutazione superiore ed una inferiore. Costruire un piano di taglio di Gomory.

VARIABILI DI DECISIONE

$x_1 \leftarrow$ QUINTALI DI LAMINATO X PRODOTTO

$x_2 \leftarrow$ QUINTALI DI LAMINATO Y PRODOTTO

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max\ cx = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 8x_1 + 11x_2$$

c_1, c_2: RICAVI VENDITA PER QUINTALE

max: MASSIMIZZAZIONE DEL RICAVO

VINCOLI

- VARIABILI POSITIVE: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- RISPETTO DELLE DISPONIBILITÁ DI ORE:

$$30x_1 + 20x_2 \leq 120$$
$$10x_1 + 20x_2 \leq 85$$
$$20x_1 \leq 62$$
$$30x_2 \leq 105$$

$$\boxed{\begin{cases} \max\ 8x_1 + 11x_2 \\ 30x_1 + 20x_2 \leq 120 \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 85 \\ 20x_1 \leq 62 \\ 30x_2 \leq 105 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}}$$

MATLAB

$c = [-8\ \ -11] \leftarrow$ MATLAB É min!!

$Aeq = []\quad beq = []\quad LB = [0\ \ 0]\quad UB = []$

$A = [30\ \ 20;\ 10\ \ 20;\ 20\ \ 0;\ 0\ \ 30]\quad b = [120;\ 85;\ 62;\ 105]$

$\Longrightarrow [x,v] = linprog(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$

$= \left[\left(\frac{7}{4}, \frac{27}{8}\right), -\frac{409}{8}\right] = [(1.75, 3.375), -51.125]$

APPLICAZIONE SIMPLESSO

SOSTITUENDO NEI VINCOLI TROVO CHE LA BASE RELATIVA A $\bar{x} = (3.1\ \ 1.35)$ É $B = \{1, 3\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/20 \\ 1/20 & -3/40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} W = \begin{pmatrix} 0 & -1/20 \\ -1/20 & 3/40 \end{pmatrix} \\ \quad\quad 1 \quad\quad\ \ 3 \end{array}$$

$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \left(\frac{11}{20}\ \ -\frac{17}{40}\right)\quad \bar{y} = \left(\frac{11}{20}\ \ 0\ \ -\frac{17}{40}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\right)$

$h = 3$

$N = \{2, 4, 5, 6\}$

$A_2 W^3 = [10\ \ 20]\left[-\frac{1}{20};\ \frac{3}{40}\right] = 1 \leftarrow$

$A_4 W^3 = [0\ \ 30][\ ''\ ] = \frac{9}{4} \leftarrow$

$$A_5 w^3 = [1 \quad 0][\,''\,] = -\tfrac{1}{20}$$

$$A_6 w^3 = [0 \quad 1][\,''\,] = \tfrac{3}{40} \longleftarrow$$

$\bar{x} = (3.1 \quad 1.35)$

$$r_2 = 85 - [10 \quad 20]\bar{x} = 27$$

$$r_4 = \frac{105 - [0 \quad 30]\bar{x}}{9/4} = \frac{86}{3} \implies k = 2$$

$$r_6 = \frac{0 - [0 \quad 1]\bar{x}}{3/40} < 0$$

$$\implies B = \{1, 2\}$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 = 120 \\ 10x_1 + 20x_2 = 85 \end{cases}$$

$20x_1 = 35 \longrightarrow x_1 = \tfrac{7}{4}$

$x_2 = \tfrac{27}{8}$

OTTIMO!!

FOGLI DI LAMINATO

ADESSO SI RAGIONA PER FOGLIE, INTRODUCIAMO VINCOLI DI INTEREZZA $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$

$V_S \longrightarrow$ SOLUZIONE OTTIMA GIÀ TROVATA (RILASSATO CONTINUO) $\quad V_S \approx 51$

$V_I \longrightarrow$ ARROTONDO PER DIFETTO LE COMPONENTI DI $\bar{x}$ $\quad V_I = 41$

TAGLIO DI GOMORY

PONIAMO IL PROBLEMA NEL RELATIVO FORMATO

$$\begin{cases} \max\ 8x_1 + 11x_2 \\ 30x_1 + 20x_2 \le 120 \\ 10x_1 + 20x_2 \le 85 \\ 20x_1 \le 62 \\ 30x_2 \le 105 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \min\ -8x_1 - 11x_2 \\ 30x_1 + 20x_2 + x_3 = 120 \\ 10x_1 + 20x_2 + x_4 = 85 \\ 20x_1 + x_5 = 62 \\ 30x_2 + x_6 = 105 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

CON MATLAB TROVIAMO $\bar{x}_{RC} = \left(\tfrac{7}{4} \quad \tfrac{27}{8} \quad 0 \quad 0 \quad 27 \quad \tfrac{15}{4}\right)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 30 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \ \ 2 & \ \ 3 & \ 4 & \ 5 & \ 6 \end{matrix} \end{array} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2, 5, 6\}$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \tfrac{1}{20} & -\tfrac{1}{20} \\ -\tfrac{1}{40} & \tfrac{3}{40} \\ -1 & 1 \\ \tfrac{3}{4} & -\tfrac{9}{4} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & \qquad 4 \end{matrix} & \end{array} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

POSSIBILI TRE TAGLI : $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$, $r = 6$

L'ES. RICHIEDE UN SOLO TAGLIO, FACCIAMO $r = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} 30x_1 + 20x_2 + x_3 &= 120 \\ 10x_1 + 20x_2 + x_4 &= 85 \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 120 - 30x_1 - 20x_2 \\ x_4 &= 85 - 10x_1 - 20x_2 \end{aligned}}$$

$r = 1$

$$\left\{\frac{1}{20}\right\} x_3 + \left\{-\frac{1}{20}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{7}{4}\right\}$$

$$\frac{1}{20} x_3 + \frac{19}{20} x_4 \geq \frac{3}{4}$$

$$x_3 + 19 x_4 \geq 15$$

$$(120 - 30x_1 - 20x_2) + 19(85 - 10x_1 - 20x_2) \geq 15$$

$$-220x_1 - 400x_2 \geq -1720$$

$$-22x_1 - 40x_2 \geq -172$$

$$-11x_1 - 20x_2 \geq -86$$

$$11x_1 + 20x_2 \leq 86$$

Esercizio 1. Un'azienda produce due tipi di carburanti (A e B) che sono lavorati in 3 diverse fasi. I tempi in ore per produrre una tonnellata di carburante sono dati in tabella insieme alla capacitá produttiva giornaliera dei tre reparti. Ogni tonnellata di carburante A viene venduta a 540 euro mentre quella del carburante B a 590 euro.

	A	B	Capacitá
R1	0.7	0.8	18
R2	1.7	1.4	16
R3	1.9	2.1	16

Partendo dalla soluzione $x = (0, 0)$ effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non carburante ma sylos. Calcolare poi un taglio di Gomory.

VARIABILI DI DECISIONE

$x_1 \leftarrow$ TONNELLATE DI CARBURANTE A PRODOTTO

$x_2 \leftarrow$ TONNELLATE DI CARBURANTE B PRODOTTO

FUNZIONE OBIETTIVO

$\max\ cx = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 540x_1 + 590x_2$

RICAVI VENDITA PER TONNELLATE

MASSIMIZZAZIONE DEL RICAVO

VINCOLI

- VARIABILI POSITIVE: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- RISPETTO DELLE CAPACITÁ DI ORE:

$$0.7x_1 + 0.8x_2 \leq 18$$
$$1.7x_1 + 1.4x_2 \leq 16$$
$$1.9x_1 + 2.1x_2 \leq 16$$

$$\boxed{\begin{cases} \max\ 540x_1 + 590x_2 \\ 0.7x_1 + 0.8x_2 \leq 18 \\ 1.7x_1 + 1.4x_2 \leq 16 \\ 1.9x_1 + 2.1x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}}$$

APPLICAZIONE SIMPLESSO

SOSTITUENDO NEI VINCOLI TROVO CHE LA BASE RELATIVA A $\bar{x} = (0 \quad 0)$ É $B = \{4, 5\}$

$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$W = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 4 \quad 5 \end{array}$$

OCCHIO AI SEGNI

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0 \longrightarrow -x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$

$\bar{x} = (0 \quad 0)$

$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = (-540 \quad -590)$ $\quad \bar{y} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -540 \quad -590)$

$h = 4$

$N = \{1, 2, 3\}$

$A_1 W^4 = [0.7 \quad 0.8][1; 0] = 0.7 \leftarrow$

$A_2 W^4 = [1.7 \quad 1.4][\ \text{''}\ ] = 1.7 \leftarrow$

$A_3 W^4 = [1.9 \quad 2.1][\ \text{''}\ ] = 1.9 \leftarrow$

$r_1 = \dfrac{18 - 0}{0.7} = 25.71 \qquad r_2 = \dfrac{16 - 0}{1.7} = 9.41$

$r_3 = \dfrac{16 - 0}{1.9} = 8.42 \qquad \Longrightarrow k = 3$

$\Longrightarrow B = \{3, 5\}$

$\begin{cases} 1.9x_1 + 2.1x_2 = 16 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 160/19 \\ x_2 = 0 \end{array}$

$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \left(\dfrac{5400}{19} \quad \dfrac{130}{19}\right)$

SIAMO ALL'OTTIMO

SYLOS

ADESSO SI RAGIONA PER SYLOS, INTRODUCIAMO VINCOLI DI INTEREZZA $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$

$V_S \longrightarrow$ SOLUZIONE OTTIMA GIÀ TROVATA (RILASSATO CONTINUO) $\quad V_S \approx 4547$

$V_I \longrightarrow$ ARROTONDO PER DIFETTO LE COMPONENTI DI $\bar{x}$ $\quad V_I = 4320$

TAGLIO DI GOMORY

PONIAMO IL PROBLEMA NEL RELATIVO FORMATO

$$\begin{cases} \max 540x_1 + 590x_2 \\ 0.7x_1 + 0.8x_2 \leq 18 \\ 1.7x_1 + 1.4x_2 \leq 16 \\ 1.9x_1 + 2.1x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min -540x_1 - 590x_2 \\ 0.7x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 18 \\ 1.7x_1 + 1.4x_2 + x_4 = 16 \\ 1.9x_1 + 2.1x_2 + x_5 = 16 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

CON MATLAB TROVIAMO $\bar{x}_{RC} = \left(\frac{160}{19} \quad 0 \quad \frac{230}{19} \quad \frac{32}{19} \quad 0 \right)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 1.7 & 1.4 & 0 & 1 & 0 \\ 1.9 & 2.1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{matrix} \end{array} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 0.7 & 1 & 0 \\ 1.7 & 0 & 1 \\ 1.9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 3, 4\}$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{21}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{1}{38} & -\frac{7}{19} \\ -\frac{91}{190} & -\frac{17}{19} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & \quad\quad 5 \end{matrix} & \end{array} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 1.4 & 0 \\ 2.1 & 1 \end{pmatrix}$$

POSSIBILI TRE TAGLI : $r = 1$, $r = 3$, $r = 4$

L'ES. RICHIEDE UN SOLO TAGLIO, FACCIAMO $r = 1$

$r = 1$

$$\left\{\frac{21}{19}\right\} x_2 + \left\{\frac{10}{19}\right\} x_5 \geq \left\{\frac{160}{19}\right\}$$

$$\frac{2}{19} x_2 + \frac{10}{19} x_5 \geq \frac{8}{19}$$

$$2x_2 + 10x_5 \geq 8$$

$$\boxed{1.9x_1 + 2.1x_2 + x_5 = 16}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_5 = 16 - 1.9x_1 - 2.1x_2}$$

$$2x_2 + 10(16 - 1.9x_1 - 2.1x_2) \geq 8$$

$$-19x_1 - 19x_2 \geq -152$$

$$-x_1 - x_2 \geq -8$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

Esercizio 1. Un'industria produce A e B che devono passare da entrambi i reparti X e Y. La quantitá prodotta di A deve essere almeno il 50% di quella prodotta di tipo B. I tempi di lavorazione in ore per tonnellata di prodotto e la disponibilitá in ore a settimana dei due reparti sono date dalla seguente tabella. Sapendo che il prodotto A fornisce un guadagno di 250 euro per tonnellata mentre quello B di 300 determinare il piano di produzione settimanale che massimizza il guadagno.

	A	B	Disponibilitá
Reparto X	2	1.5	103
Reparto Y	0.5	1	51

La soluzione $x = (20.4, 40.8)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non tonnellate di prodotto ma scatole. Calcolare poi un taglio di Gomory.

VARIABILI DI DECISIONE

$x_1 \leftarrow$ TONNELLATE DI PRODOTTO A VENDUTO
$x_2 \leftarrow$ TONNELLATE DI PRODOTTO B VENDUTO

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max cx = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 250x_1 + 300x_2$$

RICAVI VENDITA PER TONNELLATE

MASSIMIZZAZIONE DEL RICAVO

VINCOLI

- VARIABILI POSITIVE: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- RISPETTO DELLE DISPONIBILITÁ DI ORE:
$$2x_1 + 1.5x_2 \leq 103$$
$$0.5x_1 + x_2 \leq 51$$
- QUANTITÁ DI A ALMENO IL 50% DI B:
$$x_1 \geq \frac{1}{2}x_2 \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 - 0.5x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 0.5x_2 \leq 0 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{cases} \max 250x_1 + 300x_2 \\ 2x_1 + 1.5x_2 \leq 103 \\ 0.5x_1 + x_2 \leq 51 \\ -x_1 + 0.5x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}}$$

APPLICAZIONE SIMPLESSO

SOSTITUENDO NEI VINCOLI TROVO CHE LA BASE RELATIVA A $\bar{x} = (20.4 \ \ 40.8)$ É $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ -0.8 & -0.4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} 2 & \quad 3 \end{array} \end{array}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = (340 \ \ -80) \qquad \bar{y} = (0 \ \ 340 \ \ -80 \ \ 0 \ \ 0)$$

$h = 3$

$$N = \{1, 4, 5\}$$

$$A_1 W^3 = [2 \ \ 1.5][0.8 \ \ -0.4] = 1$$

$$A_4 W^3 = [-1 \ \ 0][\ \ " \ \ ] = -4/5$$

$$A_5 W^3 = [0 \ \ -1][\ \ " \ \ ] = 2/5$$

$$\lambda_1 = 103 - [2 \ \ 1.5]\bar{x} = 1 \qquad \lambda_5 = \frac{0 - [0 \ \ -1]\bar{x}}{(2/5)} = 102$$

$\Longrightarrow k = 1$

$\Longrightarrow B = \{1, 2\}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = (80 \qquad 180)$$

SIAMO ALL'OTTIMO

$$\begin{cases} 2x_1 + 1.5x_2 = 103 \\ 0.5x_1 + x_2 = 51 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} -2.5x_2 = -101 \longrightarrow x_2 = \frac{202}{5} = 40.4 \\ 0.5x_1 = 10.6 \longrightarrow x_1 = \frac{106}{5} = 21.2 \end{array}$$

SCATOLE

ADESSO SI RAGIONA PER SCATOLE, INTRODUCIAMO VINCOLI DI INTEREZZA $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$

$V_S \longrightarrow$ SOLUZIONE OTTIMA GIÀ TROVATA (RILASSATO CONTINUO) $\quad V_S = 17420$

$V_I \longrightarrow$ ARROTONDO PER DIFETTO LE COMPONENTI DI $\bar{x}$ $\quad V_I = 17250$

TAGLIO DI GOMORY

PONIAMO IL PROBLEMA NEL RELATIVO FORMATO

$$\begin{cases} \max\ 250x_1 + 300x_2 \\ 2x_1 + 1.5x_2 \leq 103 \\ 0.5x_1 + x_2 \leq 51 \\ -x_1 + 0.5x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ -250x_1 - 300x_2 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 = 103 \\ 0.5x_1 + x_2 + x_4 = 51 \\ -x_1 + 0.5x_2 + x_5 = 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

CON MATLAB TROVIAMO $\bar{x}_{RC} = \left(\frac{106}{5} \quad \frac{202}{5} \quad 0 \quad 0 \quad 1\right)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{matrix} \end{array} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2, 5\}$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4/5 & -6/5 \\ -2/5 & 8/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & \qquad 4 \end{matrix} & \end{array} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

POSSIBILI TRE TAGLI : $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$

L'ES. RICHIEDE UN SOLO TAGLIO, FACCIAMO $r = 1$

$r = 1$

$$\left\{\frac{4}{5}\right\} x_3 + \left\{-\frac{6}{5}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{106}{5}\right\}$$

$$\frac{4}{5} x_3 + \frac{4}{5} x_4 \geq \frac{1}{5}$$

$$4x_3 + 4x_4 \geq 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 = 103 \\ 0.5x_1 + x_2 + x_4 = 51 \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_3 = 103 - 2x_1 - 1.5x_2 \\ x_4 = 51 - 0.5x_1 - x_2 \end{matrix}}$$

$$4(103 - 2x_1 - 1.5x_2) + 4(51 - 0.5x_1 - x_2) \geq 1$$

$$-10x_1 - 10x_2 \geq -615$$

$$-2x_1 - 2x_2 \geq -123$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 123$$

Esercizio 1. Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai e robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 50 quintali di bene A, 25 di bene B, 25 di bene C e 55 di bene D. Ciascun operaio o robot puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai e robot necessari per produrre singolarmente un quintale di ciascuno dei beni A, B, C e D, i costi di manutenzione (per i robot) ed il salario (per un operaio) da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

	A	B	C	D	costi
operai	8	15	4	4	8
robot	4	10	2	3	9

La soluzione 300 operai e 50 robot é ottima per il rilassato continuo? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non quintali di bene ma scatole ognuna contenente un quintale di bene. Calcolare poi un taglio di Gomory.

VARIABILI DI DECISIONE

$x_1 \leftarrow$ NUMERO OPERAI IMPIEGATI

$x_2 \leftarrow$ NUMERO ROBOT IMPIEGATI

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min cx = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 8x_1 + 9x_2$$

MINIMIZZAZIONE DEI COSTI — STIPENDIO — MANUTENZIONE

SI DIVIDE: NUM. TOTALI, NON RELATIVI A UN PARTICOLARE BENE

VINCOLI

- VARIABILI POSITIVE: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- RISPETTO DELLE QUANTITÀ MINIME DA PRODURRE:

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} \geq 50 \qquad \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{10} \geq 25$$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} \geq 25 \qquad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} \geq 55$$

- NUMERO OPERAI ALMENO TRE VOLTE NUMERO ROBOT

$$x_1 \geq 3x_2$$

MATLAB

$c = [8 \quad 9]$

$Aeq = [\,]$ $\quad beq = [\,]$ $\quad LB = [0 \quad 0]$ $\quad UB = [\,]$

$A = \left[-\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{4};\ -\frac{1}{15} \quad -\frac{1}{10};\ -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{3};\ -1 \quad 3\right]$

$b = [-50; -25; -25; -55; 0]$

$\Longrightarrow [x, v] = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$

$= \left[\left(250, \frac{250}{3}\right), 2750\right] = [(250,\ 83.33),\ 2750]$

$$\begin{cases} \min\ 8x_1 + 9x_2 \\ \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} \geq 50 \ (1) \qquad (2)\ \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{10} \geq 25 \\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} \geq 25 \ (3) \qquad (4)\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} \geq 55 \\ x_1 \geq 3x_2 \ (5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (6)(7) \end{cases}$$

APPLICAZIONE SIMPLESSO

$$A_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & -60 \\ -16 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \\ W = & \begin{pmatrix} -24 & 60 \\ 16 & -30 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \end{array}$$

SOSTITUENDO NEI VINCOLI TROVO CHE LA BASE RELATIVA A $\bar{x} = (300 \quad 50)$ É $B = \{1, 2\}$

$\bar{Y}_B = c A_B^{-1} = (48 \quad -210)$ $\quad \bar{y} = (48 \quad -210 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$h = 2$

$N = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A_3 W^2 = [-\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{2}][60; -30] = 0$

$A_4 W^2 = [-\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{3}][\quad " \quad] = -5$

$A_5 W^2 = [-1 \quad 3][\quad " \quad] = -150$

$A_6 W^2 = [-1 \quad 0][\quad " \quad] = -60$

$A_7 W^2 = [0 \quad -1][\quad " \quad] = 30 \quad \leftarrow \quad k = 5$

$\Rightarrow B = \{1, 5\}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} x_1 - \frac{1}{4} x_2 = -50 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$-\frac{1}{8} 3x_2 - \frac{1}{4} x_2 = -50 \rightarrow x_2 = 80$

$x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = 240$

$\bar{x} = (240, 80)$

L'ESERCIZIO SI FERMA QUA: IL PROFESSORE HA SICURAMENTE SBAGLIATO QUALCOSA.

Esercizio 1. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da un litro, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 m^3. Il profitto ottenuto dalla vendita di un litro di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in almeno 600 litri di latte liquido e almeno 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 m^3. Determinare quanto produrre dei diversi tipi di latte per massimizzare il profitto. Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima. Quale capacità minima deve avere il veicolo per soddisfare le richieste?

MODELLO MATEMATICO

$x_1 \leftarrow$ LITRI DI LATTE LIQUIDO PRODOTTI
$x_2 \leftarrow$ BARATTOLI DI LATTE IN POLVERE PRODOTTI (2Kg)
$x_3 \leftarrow$ BARATTOLI DI LATTE IN POLVERE PRODOTTI (1.5Kg)
$x_4 \leftarrow$ BARATTOLI DI LATTE IN POLVERE PRODOTTI (1Kg)

$$\max c \cdot x = 1.20x_1 + 14x_2 + 8.5x_3 + 7x_4$$

MASSIMIZZO I RICAVI

$24 - 5 \cdot 2 = 14$ $16 - 5 \cdot 1.5 = 8.5$ $12 - 5 \cdot 1 = 7$

VINCOLI:

- VARIABILI POSITIVE
  $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0$
- RICHIESTE MINIME
  $x_1 \geq 600$
  $2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \geq 200$
- RISPETTO CAPIENZA DEL VEICOLO
  $0.002x_1 + 0.004x_2 + 0.003x_3 + 0.002x_4 \leq 28.3$

$$\boxed{\begin{cases} \max c \cdot x = 1.20x_1 + 14x_2 + 8.5x_3 + 7x_4 \\ x_1 \geq 600 \\ 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002x_1 + 0.004x_2 + 0.003x_3 + 0.002x_4 \leq 28.3 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0 \end{cases}}$$

MATLAB

c = [-1.20 -14 -8.5 -7] ← ATTENZIONE, linprog é min

Aeq = [] beq = [] LB = [600 0 0 0] UB = []

A = [0 -2 -1.5 -1; 0.002 0.004 0.003 0.002]
b = [-200; 28.3]

$$[x, v] = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$$
$$= [(600, 0, 0, 13550), -95570]$$

E SE NON AVESSI POSTO $x_1 \geq 600$ IN LB?

$c = [-1.20 \quad -14 \quad -8.5 \quad -7]$ ← ATTENZIONE, linprog É min

$Aeq = [\,]$ $beq = [\,]$ $LB = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ $UB = [\,]$

$A = [-1 \; 0 \; 0 \; 0; \; 0 \; -2 \; -1.5 \; -1; \; 0.002 \quad 0.004 \quad 0.003 \quad 0.002]$
$b = [-600; -200; 28.3]$

$$[x, v] = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$$
$$= [(600, 0, 0, 13550), -95570]$$ UGUALE

CAPACITÁ MINIMA: $600 \cdot 0.002\,m^3 + 13550 \cdot 0.002\,m^3 = 28.3\ m^3$

Esercizio 2. Un istituto bancario ha la possibilitá di aprire fino ad un massimo di nove nuove filiali nelle province toscane. Nella tabella sono riportati il costo di apertura in migliaia di euro e il numero di potenziali nuovi clienti che si possono acquisire.

POSSIBILI SEDI →
- 2 VOLTE FI
- SCACIATA MC

Provincia	FI	LI	LU	GR	FI	SI	AR	SI	PI
Costo	50	40	30	25	40	50	60	40	30
Potenziali clienti	300	100	250	200	400	120	100	100	400

Avendo a disposizione un budget di 200.000 euro scrivere e risolvere il problema di stabilire dove aprire le nuove filiali per massimizzare il numero di potenziali nuovi clienti da acquisire.
Se l'istituto sa che non puó aprire piú di una filiale nella provincia di Firenze cosa si puó dire con la soluzione ottima appena trovata? In generale la soluzione ottima potrebbe rimanere inalterata? Se sí, fornire un esempio.

MODELLO MATEMATICO

$p_i \equiv$ POPOLAZIONE PROVINCIA i-ESIMA (NOTO)

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{NON APRO NELLA PROVINCIA } i\text{-ESIMA} \\ 1 & \text{APRO NELLA PROVINCIA } i\text{-ESIMA} \end{cases}$$

$$\max \ p \cdot x = 300x_1 + 100x_2 + 250x_3 + 200x_4 + 400x_5 + 120x_6 + 100x_7 + 100x_8 + 400x_9$$

↓

MASSIMIZZARE POPOLAZIONE RAGGIUNTA

- INTEREZZA: $x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\dots,9\}$

- RISPETTO DEL BUDGET:

$$50x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 25x_4 + 40x_5 + 50x_6 + 60x_7 + 40x_8 + 30x_9 \leq 200$$

- MASSIMO DI NOVE FILIALI

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 9$$

$$\boxed{\begin{cases} \max \ 300x_1 + 100x_2 + 250x_3 + 200x_4 + 400x_5 + 120x_6 + 100x_7 + 100x_8 + 400x_9 \\ 50x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 25x_4 + 40x_5 + 50x_6 + 60x_7 + 40x_8 + 30x_9 \leq 200 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 9 \\ x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1,\dots,9\} \end{cases}}$$

PONGO IN MATLAB $\Longrightarrow$ $\bar{x} = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$

$v = |-1550| = 1550 * 1000$ POPOLAZIONE RAGGIUNTA

AL PIÚ UNA SOLA SEDE A FIRENZE $\quad x_1 + x_5 \leq 1$

MATLAB $\Longrightarrow$ $\bar{x} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$

$v = |-1370| = 1370 * 1000$ POPOLAZIONE RAGGIUNTA

LA SOLUZIONE É CAMBIATA (NON SIAMO SORPRESI, PRIMA $x_1 = x_5 = 1$)

Esercizio 2. Si consideri una rete di cittá le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

Scrivere un modello matematico per trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete di cittá.

$$\min \; 26x_{12} + 20x_{13} + 24x_{14} + 19x_{15} + 26x_{21} + 34x_{23} + 23x_{24} + 22x_{25} + 20x_{13} + 34x_{23} + 27x_{34} + 21x_{35} + 24x_{14} + 23x_{24} + 27x_{34} + 21x_{45} + 19x_{15} + 22x_{25} + 21x_{35} + 32x_{45}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 2$$
$$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} = 2$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} = 2$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 2$$

$|N| = 5 \Rightarrow$ SOTTOINSIEMI S DI CARDINALITÁ 2

$S = \{1,2\}$ $\quad x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \geq 1$

$S = \{1,3\}$ $\quad x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{13} + x_{23} + x_{35} \geq 1$

$S = \{1,4\}$ $\quad x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{24} + x_{34} + x_{45} \geq 1$

$S = \{1,5\}$ $\quad x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \geq 1$

$S = \{2,3\}$ $\quad x_{12} + x_{24} + x_{25} + x_{13} + x_{34} + x_{45} \geq 1$

$S = \{2,4\}$ $\quad x_{12} + x_{23} + x_{25} + x_{14} + x_{34} + x_{45} \geq 1$

$S = \{2,5\}$ $\quad x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{15} + x_{35} + x_{45} \geq 1$

$S = \{3,4\}$ $\quad x_{13} + x_{23} + x_{35} + x_{14} + x_{24} + x_{45} \geq 1$

$S = \{3,5\}$ $\quad x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{15} + x_{25} + x_{45} \geq 1$

$S = \{4,5\}$ $\quad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 1$

Esercizio 2. Si consideri il problema di caricare (in modo binario) un camion di portata massima pari a 39 quintali, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti.

Beni	1	2	3	4	5	6
Valori	52	27	50	60	31	11
Peso	10	6	15	22	17	14

Calcolare una valutazione superiore considerando il rilassamento $x \geq 0$. La soluzione ottima di tale rilassamento continuo é un vertice? Se sí quale é la base? Scrivere l'equazione di un piano di taglio di Gomory. Calcolare poi una valutazione superiore considerando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$. Eseguire l'algoritmo del Branch and Bound istanziando almeno 2 variabili.

MODELLO MATEMATICO (PROBLEMA DELLO ZAINO)

- VARIABILI DI DECISIONE: $x \in \{0,1\}^6$

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{IL BENE } i\text{-ESIMO È CARICATO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max \ c \cdot x \qquad c = (52 \ \ 27 \ \ 50 \ \ 60 \ \ 31 \ \ 11)$$

VALORI DEI BENI (DA MASSIMIZZARE)

- VINCOLI: 1) INTEREZZA: $x_i \in \{0,1\} \ \forall i$

2) RISPETTO DELLA CAPACITÀ

$$10x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 22x_4 + 17x_5 + 14x_6 \leq 39$$

$$\boxed{\begin{cases} \max \ 52x_1 + 27x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 31x_5 + 11x_6 \\ 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 22x_4 + 17x_5 + 14x_6 \leq 39 \\ x_i \in \{0,1\} \ \forall i \end{cases}}$$

CALCOLO I RENDIMENTI E APPLICO GOMORY

$$\bar{r} = \left(\frac{52}{10} \ \ \frac{27}{6} \ \ \frac{50}{15} \ \ \frac{60}{22} \ \ \frac{31}{17} \ \ \frac{11}{14}\right) = (5.2 \ \ 4.5 \ \ 3.33 \ \ 2.72 \ \ 1.82 \ \ 0.78)$$

- V_S INTERA: PRENDO IL BENE DI MAX RENDIMENTO E SATURO

$$x_1 = 3 + \frac{9}{10} = \frac{39}{10} \qquad x_i = 0 \ \ \forall i \neq 1$$

$$V_S = \frac{39}{10} \, 52 \approx 202$$

SICURAMENTE È UN VERTICE DEL R.C. DEL PROBLEMA → DIMOSTRAZ. FATTA PER INTRODURRE I RENDIMENTI

$$B = \{1\} \qquad A_B = \{10\}$$

$$A_N = \{6 \ \ 15 \ \ 22 \ \ 17 \ \ 14\}$$

$$\begin{cases} \min \ -52x_1 - 27x_2 - 50x_3 - 60x_4 - 31x_5 - 11x_6 \\ 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 22x_4 + 17x_5 + 14x_6 + x_7 = 39 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \frac{1}{10} A_N = \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \left\{ \frac{6}{10} \ \frac{15}{10} \ \frac{22}{10} \ \frac{17}{10} \ \frac{14}{10} \ \frac{1}{10} \right\}$$

$r = 1$

$$\frac{6}{10}x_2 + \frac{5}{10}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{7}{10}x_5 + \frac{2}{5}x_6 + \frac{1}{10}x_7 \geq \frac{9}{10}$$

$$x_7 = 39 - 10x_1 - 6x_2 - 15x_3 - 22x_4 - 17x_5 - 14x_6$$

$$-x_1 + 0x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 - x_6 \geq -3$$

$$\underline{x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \leq 3}$$

- V_S BINARIA:
  - METTO $x_1 = 1$ — C: $39 \to 29$
  - METTO $x_2 = 1$ — C: $29 \to 23$
  - METTO $x_3 = 1$ — C: $23 \to 8$
  - METTO $x_4 = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$ — SATURO
  - $x_i = 0 \quad \forall i > 4$

$V_S = 52 + 27 + 50 + \frac{4}{11}60 \approx 150$

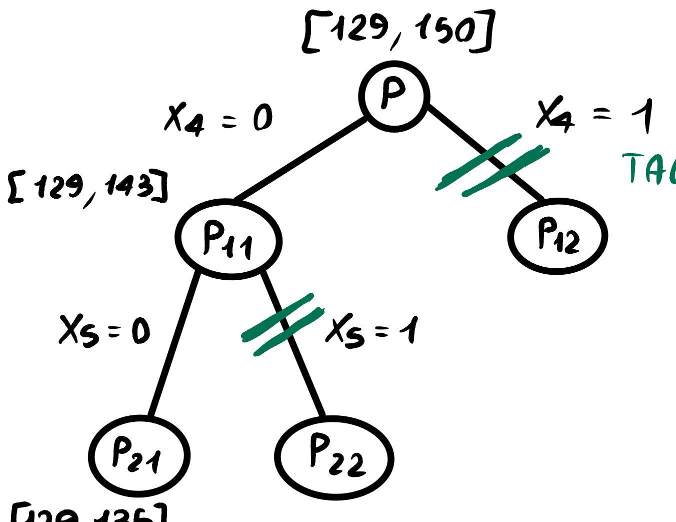
APPLICO IL BRANCH AND BOUND

$V_S \approx 150$, GIÀ CALCOLATO

NON STANNO NEL CONTENITORE PER INTERO

V_I LA OTTENGO DA $\bar{x} = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \longrightarrow V_I = 52 + 27 + 50 = 129$

SUPPONIAMO GIÀ ISTANZIATE $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (SEMPLIFICAZIONE UN PO' ESTREMA)



$V_S(P_{11})$

METTO $x_1 = x_2 = x_3 = 1$
IMPONGO $x_4 = 0$
SATURO CON $x_5 = \frac{8}{17}$

$52 + 27 + 50 + \frac{8}{17}31 \approx 143$

$V_S(P_{11}) > V_I(P)$

$V_S(P_{21})$

METTO $x_1 = x_2 = x_3 = 1$
IMPONGO $x_4 = x_5 = 0$
SATURO CON $x_6 = \frac{8}{14}$

$52 + 27 + 50 + \frac{8}{14}11 \approx 135$

$V_S(P_{21}) > V_I(P)$

Esercizio 2.
Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{cases} \max\ 11x_1 + 52x_2 + 27x_3 + 50x_4 + 60x_5 + 31x_6 \\ \quad 14x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 22x_5 + 17x_6 \le 39 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{P}$$

Determinare la valutazione data dal rilassamento continuo $0 \le x \le 1$, quella data dal rilassamento $x \ge 0$ e quella ottenuta aggiungendo un piano di taglio di Gomory. Risolvere poi il problema con il 'Branch and Bound' utilizzando il rilassamento $0 \le x \le 1$.

MODELLO MATEMATICO (PROBLEMA DELLO ZAINO)

– VARIABILI DI DECISIONE: $x \in \{0,1\}^6$

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{IL BENE } i\text{-ESIMO È CARICATO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CALCOLO I RENDIMENTI

MAX $B=\{2\}$

$$\bar{r} = \left(\frac{11}{14}\ \ \frac{52}{10}\ \ \frac{27}{6}\ \ \frac{50}{15}\ \ \frac{60}{22}\ \ \frac{31}{17}\right) = (0.78\ \ 5.2\ \ 4.5\ \ 3.33\ \ 2.72\ \ 1.82)$$

– V_S INTERA: PRENDO IL BENE DI MAX RENDIMENTO E SATURO

$$x_2 = 3 + \frac{9}{10} = \frac{39}{10} \qquad x_i = 0 \quad \forall i \neq 2$$

$$V_S = \frac{39}{10}\, 52 \approx 202$$

– V_S BINARIA:
- METTO $x_2 = 1$ $\quad C: 39 \to 29$
- METTO $x_3 = 1$ $\quad C: 29 \to 23$
- METTO $x_4 = 1$ $\quad C: 23 \to 8$
- METTO $x_5 = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$ $\quad$ SATURO
- $x_i = 0 \quad \forall i \in \{1,6\}$

$$V_S = 52 + 27 + 50 + \frac{4}{11}60 \approx 150$$

APPLICO GOMORY

VAR. DI SCARTO

$$A_B = \{10\}$$

$$A_N = \{14, 6, 15, 22, 17\}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1}A_N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} \frac{14}{10} & \frac{6}{10} & \frac{15}{10} & \frac{22}{10} & \frac{17}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right) & 2 \end{array}$$

$$\left\{\frac{14}{10}\right\}x_1 + \left\{\frac{6}{10}\right\}x_3 + \left\{\frac{15}{10}\right\}x_4 + \left\{\frac{22}{10}\right\}x_5 + \left\{\frac{17}{10}\right\}x_6 + \left\{\frac{1}{10}\right\}x_7 \ge \left\{\frac{39}{10}\right\}$$

$$\frac{14}{10}x_1 + \frac{6}{10}x_3 + \frac{5}{10}x_4 + \frac{2}{10}x_5 + \frac{7}{10}x_6 + \frac{1}{10}x_7 \ge \frac{9}{10}$$

$$14x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 + 7x_6 + x_7 \ge 9$$

$$x_7 = 39 - 14x_1 - 10x_2 - 6x_3 - 15x_4 - 22x_5 - 17x_6$$

$$-10x_2 - 10x_4 - 20x_5 - 10x_6 \ge -30$$

$$10x_2 + 10x_4 + 20x_5 + 10x_6 \le 30$$

$$x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 3$$

ESEGUENDO IN MATLAB TROVO

$$c = [-11 \quad -52 \quad -27 \quad -50 \quad -60 \quad -31]$$

$$Aeq = [\,] \quad beq = [\,] \quad LB = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \quad UB = [\,]$$

$$A = [14 \quad 10 \quad 6 \quad 15 \quad 22 \quad 17;\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1] \quad b = [39; 3]$$

$$[x, v] = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$$

$$= \left[\left(0, 3, \tfrac{3}{2}, 0, 0, 0\right), -393/2\right]$$

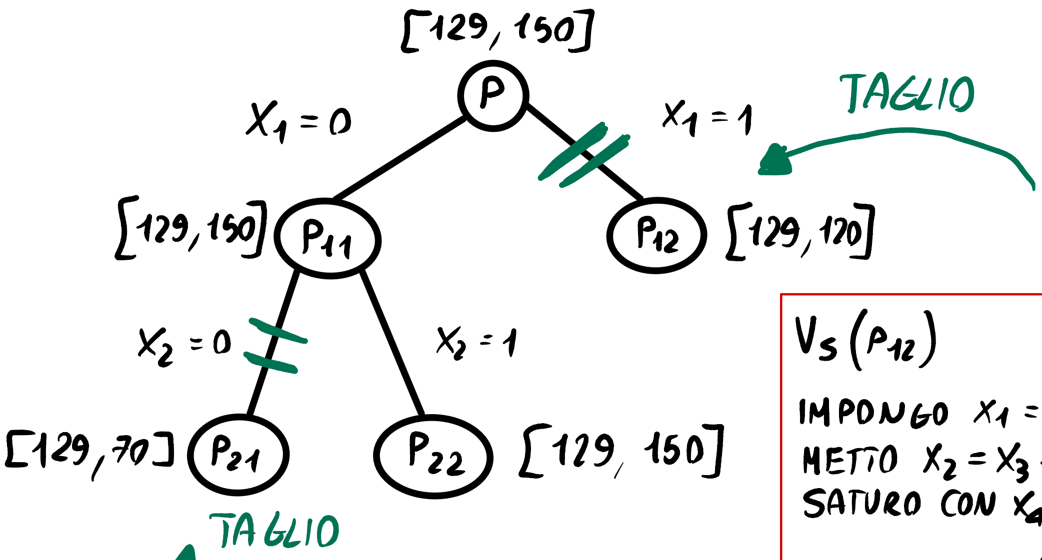
$$V_s = 393/2 \approx 196$$

APPLICO IL BRANCH AND BOUND

$V_S \approx 150$, GIÁ CALCOLATO

NON STANNO NEL CONTENITORE PER INTERO

V_I LA OTTENGO DA $\bar{x} = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0) \longrightarrow V_I = 52 + 27 + 50 = 129$



$V_S(P_{11})$

IMPONGO $X_1 = 0$
METTO $X_2 = X_3 = X_4 = 1$
SATURO CON $X_5 = 4/11$

$52 + 27 + 50 + 60 \cdot \frac{4}{11}$
≈ 150

$V_S(P_{11}) > V_I(P)$

$V_S(P_{12})$

IMPONGO $X_1 = 1$
METTO $X_2 = X_3 = 1$
SATURO CON $X_4 = 9/15$

$11 + 52 + 27 + \frac{9}{15}\, 50$
≈ 120

$V_S(P_{11}) < V_I(P)$

$V_S(P_{21})$

IMPONGO $X_1 = 0, X_2 = 0$
METTO $X_3 = X_4 = 1$
SATURO CON $X_5 = \frac{18}{22}$

$6 + 15 + \frac{18}{22}\, 60$
≈ 70

$V_S(P_{21}) < V_I(P)$

$V_S(P_{22})$

IMPONGO $X_1 = 0, X_2 = 1$
METTO $X_3 = X_4 = 1$
SATURO CON $X_5 = \frac{4}{11}$

$52 + 27 + 50 + 60 \cdot \frac{4}{11}$
≈ 150

$V_S(P_{22}) > V_I(P)$

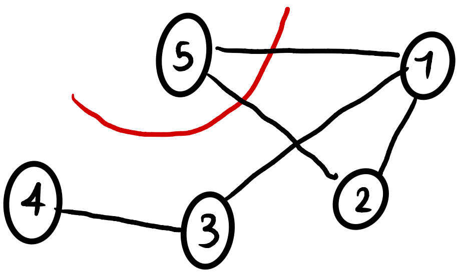
ATTENZIONE, IL PROF. VUOLE CHE SI ISTANZINO LE VARIABILI FRAZIONARIE (NON SONO STATO PROPRIO REGOLARE)

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	2	3	4	5
1	20	24	31	12
2		29	28	8
3			26	22
4				21

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 4. Il ciclo cosí trovato é l'assegnamento di costo minimo? Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{15}, x_{25}. Siamo arrivati all'ottimo?

VALUTAZIONE INFERIORE



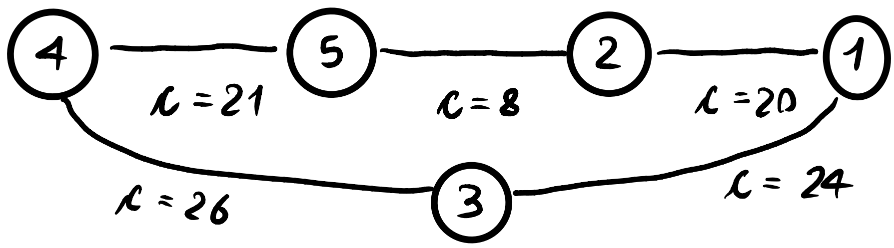
APPLICO KRUSKAL:
- ARCO 12 ($c = 20$)
- ARCO 13 ($c = 24$)
- ARCO 34 ($c = 26$)

COLLEGO IL NODO 5:
- ARCO 25 ($c = 8$)
- ARCO 15 ($c = 12$)

$$V_I = 20 + 24 + 26 + 8 + 12 = 90$$

VALUTAZIONE SUPERIORE

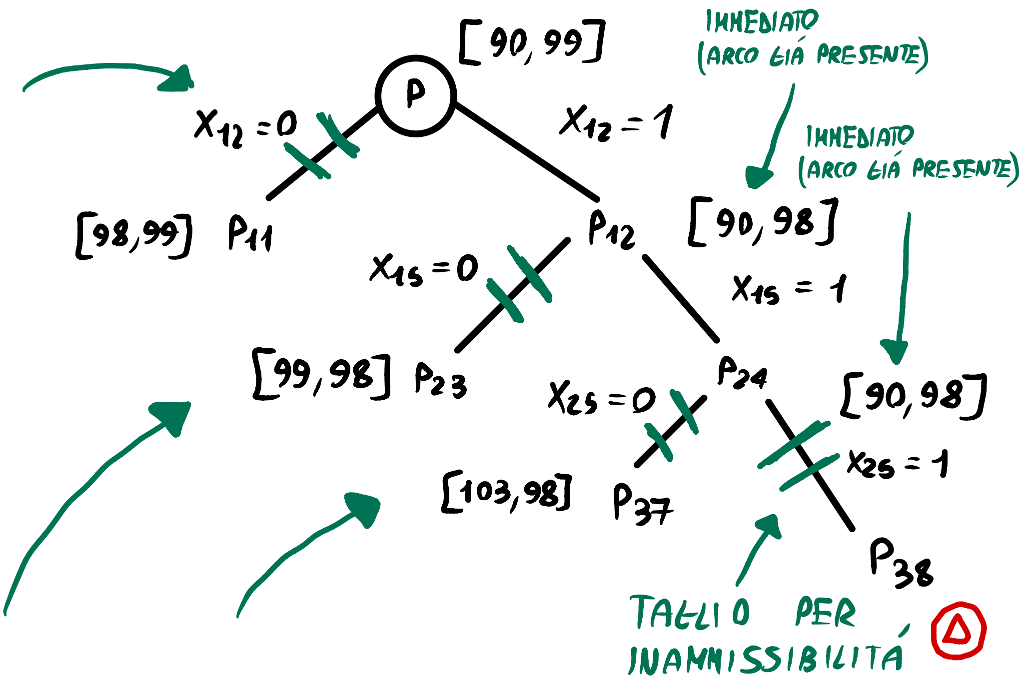
APPLICO ALGORITMO DEL NODO PIÚ VICINO



$$V_S = 21 + 8 + 20 + 24 + 26 = 99$$

L'UNICO MODO PER COLLEGARE ULTERIORI ARCHI AL CICLO 1-2-5 É VIOLARE I VINCOLI DI GRADO

BRANCH AND BOUND



$V_I(P_{11})$

LEVO L'ARCO 12 ($c = 20$)
METTO L'ARCO 24 ($c = 28$)

$$V_I(P_{11}) = 90 - 20 + 28 = 98$$

CICLO HAMILTONIANO
1-3-4-2-5

$V_I(P_{23})$ LEVO L'ARCO 15 ($c = 12$)
METTO L'ARCO 45 ($c = 21$)

$$V_I(P_{23}) = 90 - 12 + 21 = 99 > 98$$

$V_I(P_{37})$ LEVO L'ARCO 25 ($c = 8$)
METTO L'ARCO 45 ($c = 21$)

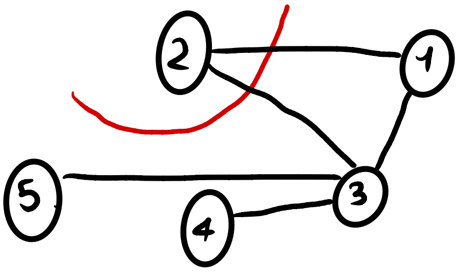
$$V_I(P_{37}) = 90 - 8 + 21 = 103 > 98$$

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 5. Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35} e x_{15}. Se ci fosse l'obbligo di passare da uno tra gli archi $(1, 2)$ e $(3, 5)$ cosa cambierebbe nel modello? Come si potrebbe calcolare una valutazione superiore ed una inferiore?

VALUTAZIONE INFERIORE



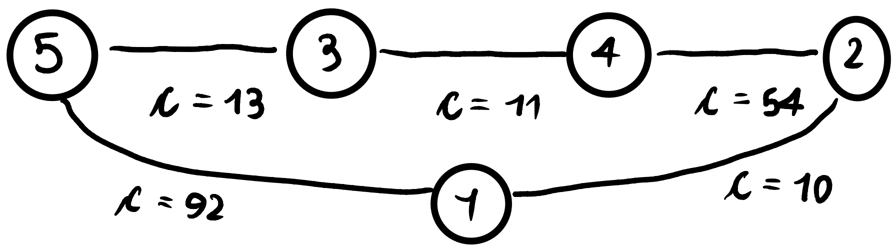
APPLICO KRUSKAL:
- ARCO 34 ($c = 11$)
- ARCO 35 ($c = 13$)
- ARCO 13 ($c = 41$)

COLLEGO IL NODO 2:
- ARCO 12 ($c = 10$)
- ARCO 23 ($c = 27$)

$V_I = 11 + 13 + 41 + 10 + 27 = 102$

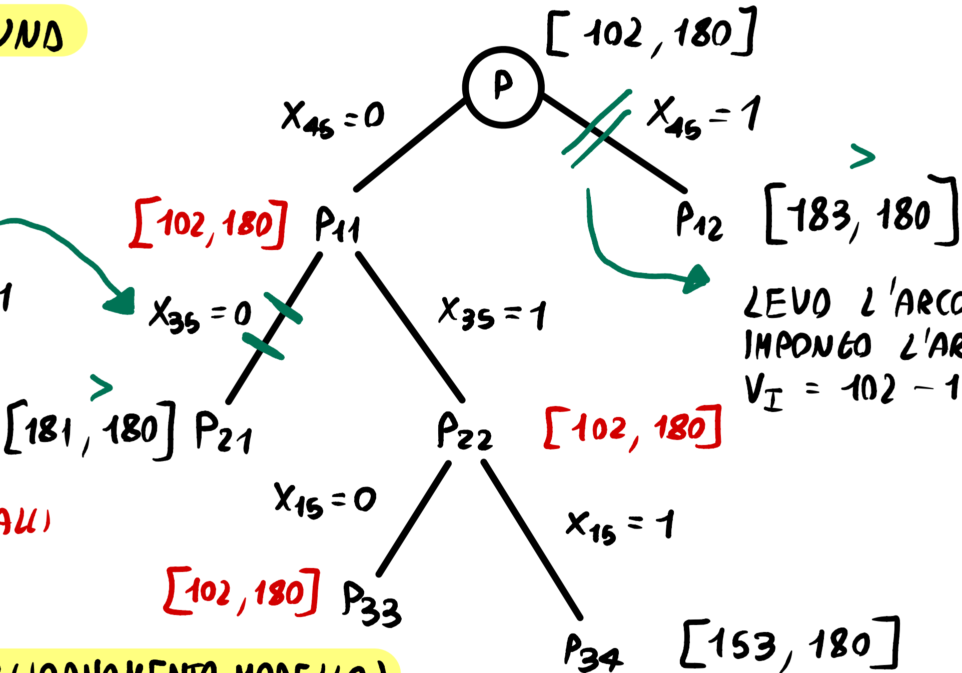
VALUTAZIONE SUPERIORE

APPLICO ALGORITMO DEL NODO PIÚ VICINO



$V_S = 13 + 11 + 54 + 10 + 92 = 180$

BRANCH AND BOUND



LEVO L'ARCO 35
IMPONGO L'ARCO 15
$V_I = 102 - 13 + 92 = 181$

LEVO L'ARCO 35
IMPONGO L'ARCO 45
$V_I = 102 - 13 + 94 = 183$

IN ROSSO GLI INTERVALLI IMMEDIATI

IMPONGO L'ARCO 15
LEVO L'ARCO 13

$V_I = 102 - 41 + 92 = 153$

NUOVO VINCOLO (AGGIORNAMENTO MODELLO)

O PASSO DA $(1,2)$ O DA $(3,5)$, NON ENTRAMBI!

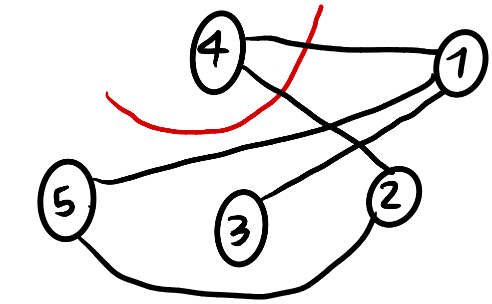
$x_{12} + x_{35} = 1$
- $x_{12} = 0$ E $x_{35} = 1$
- $x_{12} = 1$ E $x_{35} = 0$
- $x_{12} = 0$ E $x_{35} = 0$

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete:

	2	3	4	5
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

Trovare una valutazione calcolando il 4–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 3. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{34} e x_{45}. Siamo arrivati all'ottimo? Se il costo dell'arco x_{23} cambiasse, la spesa totale cambierebbe?

VALUTAZIONE INFERIORE



APPLICO KRUSKAL:
- ARCO 15 ($c = 19$)
- ARCO 13 ($c = 20$)
- ARCO 25 ($c = 22$)

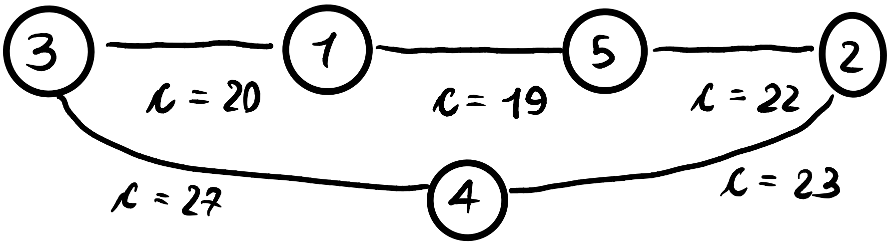
COLLEGO IL NODO 4:
- ARCO 24 ($c = 23$)
- ARCO 14 ($c = 24$)

$V_I = 19 + 20 + 22 + 23 + 24 = 108$

VINCOLI VIOLATI: $x_{12} + \underbrace{x_{13} + x_{14} + x_{15}}_{=1} = 2$ $\qquad \underbrace{x_{13}}_{=1} + x_{23} + x_{34} + x_{35} = 2$

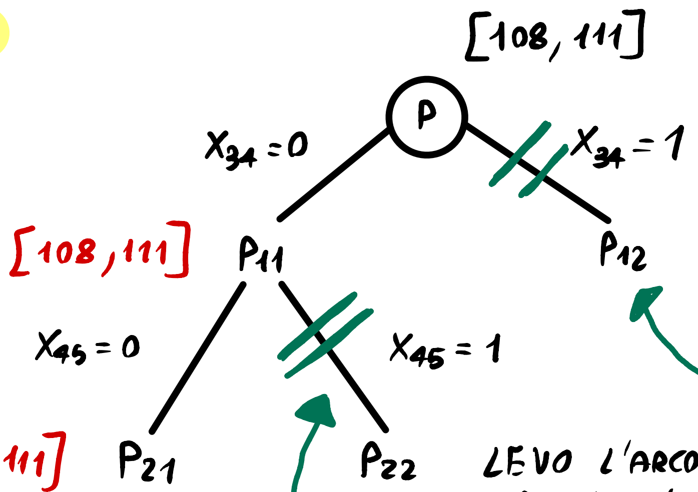
VALUTAZIONE SUPERIORE

APPLICO ALGORITMO DEL NODO PIÚ VICINO



$V_S = 20 + 19 + 22 + 23 + 27 = 111$

BRANCH AND BOUND



LEVO L'ARCO 14
IMPONGO L'ARCO 34
$V_I = 108 - 24 + 27 = 111$

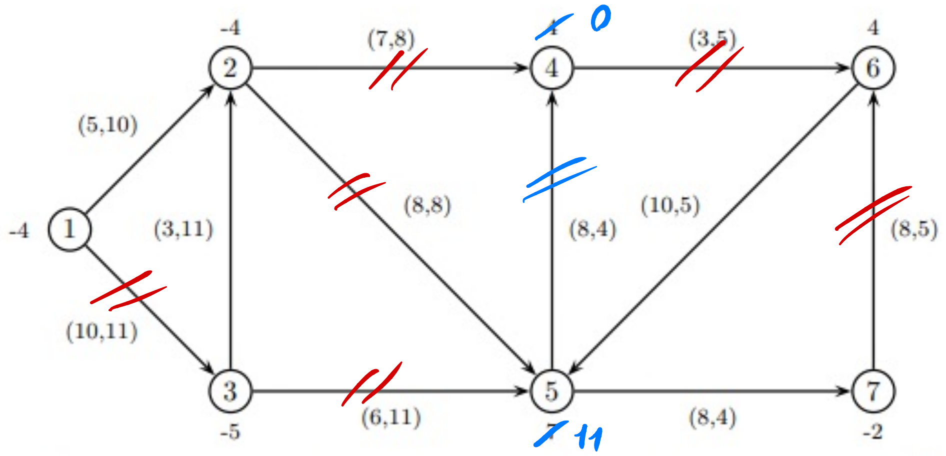
IN ROSSO GLI INTERVALLI IMMEDIATI

LEVO L'ARCO 14
IMPONGO L'ARCO 45
$V_I = 108 - 24 + 32 = 116$

NON SIAMO ARRIVATI ALL'OTTIMO
(CI SONO COSE NON POTATE)

RIGUARDO L'ARCO 23 RICORDARSI CHE PRENDIAMO GLI ARCHI DAL MENO COSTOSO IN SU
SE IL COSTO CALA LA SOLUZIONE OTTIMA PUÓ CAMBIARE

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,6) e (7,6) e l'arco (5,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare il taglio da 1 a 7 di capacitá minima.

$T = \{(1,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,6), (7,6)\}$

$U = \{(5,4)\}$ $\quad L = \{(1,2), (3,2), (5,7), (6,5)\}$

PONGO I PRIMI VALORI RELATIVI AD L E U (ARCHI VUOTI E SATURI)

$$\bar{x} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 0 & & & & 0 & & & 4 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\bar{w} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 10 & & & & 11 & & & 0 & 4 & 5 & \end{array}$$

SVOLGO LA VISITA POSTICIPATA PER FOGLIE, MA PRIMA AGGIORNIAMO I BILANCI

$b_5 = 7 + 4 = 11 \qquad b_4 = 4 - 4 = 0$

- NODO 7: $x_{76} = 2$
- NODO 6: $x_{46} = 2$
- NODO 4: $x_{24} = 2$
- NODO 2: $x_{25} = 2$
- NODO 5: $x_{35} = 9$
- NODO 3: $x_{13} = 4$

$\Longrightarrow$

$w_{76} = 5 - 2 = 3$
$w_{46} = 5 - 2 = 3$
$w_{24} = 8 - 2 = 2$
$w_{25} = 8 - 2 = 6$
$w_{35} = 11 - 9 = 2$
$w_{13} = 11 - 4 = 7$

$$\bar{x} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 9 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\bar{w} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 10 & 7 & 2 & 6 & 11 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}$$

IL FLUSSO OTTENUTO NON É DEGENERE: NON HO IN T ARCHI SATURI O VUOTI.

PER LA VERIFICA DELL'OTTIMO CALCOLO IL POTENZIALE (VISITA ANTICIPATA DELLA RADICE)

$\pi_1 = 0$

$$-\tilde{\pi}_2+\tilde{\pi}_4=7 \longrightarrow \tilde{\pi}_4=15$$
$$-\tilde{\pi}_2+\tilde{\pi}_5=8 \longrightarrow \tilde{\pi}_2=8$$
$$-\tilde{\pi}_3+\tilde{\pi}_5=6 \longrightarrow \tilde{\pi}_5=16$$
$$-\tilde{\pi}_1+\tilde{\pi}_3=10 \longrightarrow \tilde{\pi}_3=10$$
$$-\tilde{\pi}_4+\tilde{\pi}_6=3 \longrightarrow \tilde{\pi}_6=18$$
$$-\tilde{\pi}_7+\tilde{\pi}_6=8 \longrightarrow \tilde{\pi}_7=10$$

$$\tilde{\pi}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 10 & 15 & 16 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$c_{12}^{\tilde{\pi}}=5+0-8=-3<0$ ✗ DOVREBBE ESSERE POSITIVO PER BELLMAN CAPACITATO

CALCOLO ANCHE GLI ALTRI $c_{ij}^{\tilde{\pi}}$, VERIFICO SE IL POTENZIALE È DEGENERE

$c_{32}^{\tilde{\pi}}=3+2=5$

$c_{57}^{\tilde{\pi}}=8+6=14$

$c_{65}^{\tilde{\pi}}=10+2=12$ $\Longrightarrow$ POTENZIALE NON DEGENERE

$c_{54}^{\tilde{\pi}}=8+1=9$

APPLICO IL SIMPLESSO

PRENDO L'ARCO (1,2) COME ARCO ENTRANTE, PRIMO (ORDINE LESSICOGRAFICO) CHE NON RISPETTA BELLMAN CAPACITATO

CICLO 1-2-5-3

$C^+=\{(1,2),(2,5)\}$ $\qquad$ $C^-=\{(1,3),(3,5)\}$

$x_{12}=0$, $u_{12}=10$ $\qquad$ $x_{25}=2$, $u_{25}=8$ $\qquad$ $x_{13}=4$ $\qquad$ $x_{35}=9$

$\theta^+=\min\{10,8-2\}=6$ $\qquad$ $\theta^-=\min\{4,9\}=4$

$\theta=\min\{6,4\}=4 \Longrightarrow (1,3)$ ARCO USCENTE

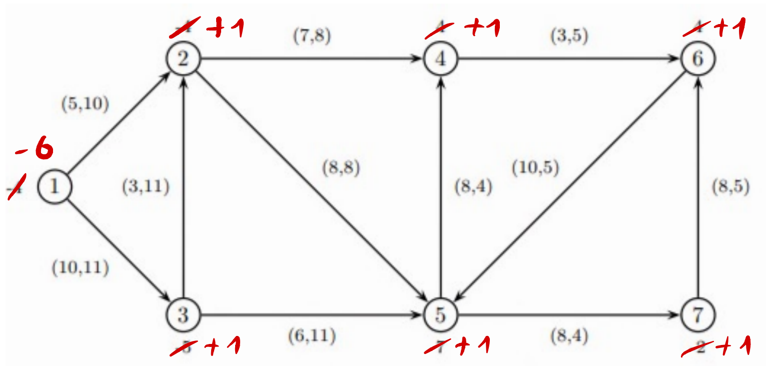
AGGIORNO IL FLUSSO

$x_{12}=0+4=4$ $\qquad$ $w_{12}=10-4=6$
$x_{25}=2+4=6$ $\qquad$ $w_{25}=6-4=2$
$x_{13}=4-4=0$ $\qquad$ $w_{13}=7+4=11$
$x_{35}=9-4=5$ $\qquad$ $w_{35}=2+4=6$

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 0 & 5 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}=\begin{pmatrix} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 54 & 57 & 65 & 76 \\ 6 & 11 & 2 & 2 & 11 & 6 & 3 & 0 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

CAMMINI MINIMI



INIZIALIZZO I VETTORI

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{0}, & \overset{2}{+\infty}, & \overset{3}{+\infty}, & \overset{4}{+\infty}, & \overset{5}{+\infty}, & \overset{6}{+\infty}, & \overset{7}{+\infty} \end{pmatrix}$$

$$p = (1; -1; -1; -1; -1; -1; -1)$$

E APPLICO DIJKSTRA

1. ESTRAGGO IL NODO 1 $\quad FC(1) = \{2,3\}$

$\tilde{\pi}_2 > \tilde{\pi}_1 + c_{12} \longrightarrow +\infty > 0+5 \quad \tilde{\pi}_2 = 5 \quad p_2 = 1$

$\tilde{\pi}_3 > \tilde{\pi}_1 + c_{13} \longrightarrow +\infty > 0+10 \quad \tilde{\pi}_3 = 10 \quad p_3 = 1$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{0}, & \overset{2}{5}, & \overset{3}{10}, & \overset{4}{+\infty}, & \overset{5}{+\infty}, & \overset{6}{+\infty}, & \overset{7}{+\infty} \end{pmatrix} \quad p = (1; 1; 1; -1; -1; -1; -1)$$

2. ESTRAGGO IL NODO 2 $\quad FC(2) = \{4,5\}$

$\tilde{\pi}_4 > \tilde{\pi}_2 + c_{24} \longrightarrow +\infty > 5+7 \quad \tilde{\pi}_4 = 12 \quad p_4 = 2$

$\tilde{\pi}_5 > \tilde{\pi}_2 + c_{25} \longrightarrow +\infty > 5+8 \quad \tilde{\pi}_5 = 13 \quad p_5 = 2$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{0}, & \overset{2}{5}, & \overset{3}{10}, & \overset{4}{12}, & \overset{5}{13}, & \overset{6}{+\infty}, & \overset{7}{+\infty} \end{pmatrix} \quad p = (1; 1; 1; 2; 2; -1; -1)$$

3. ESTRAGGO IL NODO 3 $\quad FC(3) = \{2,5\}$

$\tilde{\pi}_2 > \tilde{\pi}_3 + c_{32} \longrightarrow 5 > 10+3 \qquad \tilde{\pi}_5 > \tilde{\pi}_3 + c_{35} \longrightarrow 13 > 10+6$

4. ESTRAGGO IL NODO 4 $\quad FC(4) = \{6\}$

$\tilde{\pi}_6 > \tilde{\pi}_4 + c_{46} \longrightarrow +\infty > 12+3 \quad \tilde{\pi}_6 = 15 \quad p_6 = 4$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{0}, & \overset{2}{5}, & \overset{3}{10}, & \overset{4}{12}, & \overset{5}{13}, & \overset{6}{15}, & \overset{7}{+\infty} \end{pmatrix} \quad p = (1; 1; 1; 2; 2; 4; -1)$$

5. ESTRAGGO IL NODO 5 $\quad FC(5) = \{7\}$

$\tilde{\pi}_7 > \tilde{\pi}_5 + c_{57} \longrightarrow +\infty > 13+8 \quad \tilde{\pi}_7 = 21 \quad p_7 = 5$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \overset{1}{0}, & \overset{2}{5}, & \overset{3}{10}, & \overset{4}{12}, & \overset{5}{13}, & \overset{6}{15}, & \overset{7}{21} \end{pmatrix} \quad p = (1; 1; 1; 2; 2; 4; 5)$$

6. ESTRAGGO IL NODO 6 $\quad FC(6) = \{5\}$

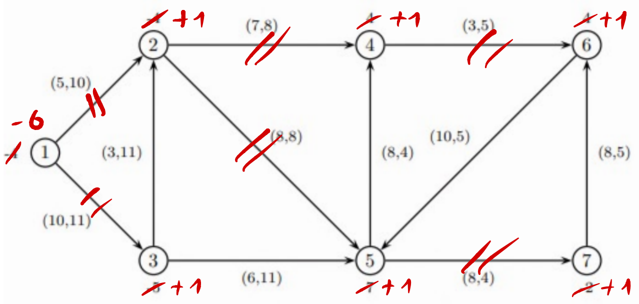
$\tilde{\pi}_5 > \tilde{\pi}_6 + c_{65} \longrightarrow 13 > 15+10$

7. ESTRAGGO IL NODO 7 $\quad FC(7) = \{6\}$

$\tilde{\pi}_6 > \tilde{\pi}_7 + c_{76} \longrightarrow 15 > 21+8$

OTTENIAMO L'ALBERO SULLA DESTRA

$$\bar{x} = (5 \ 1 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$



FLUSSO MASSIMO (TAGLIO DA 1 A 7)

- INIZIALIZZAZIONE

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 35 & 46 & 57 & 65 & 76 \\ 10 & 11 & 8 & 8 & 11 & 11 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$r_{ij} = u_{ij}$ ALL'INIZIO.

- PRIMO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~2~~
	~~3~~
	~~4~~
~~2~~	~~5~~
~~3~~	
~~4~~	6
~~5~~	7

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3\}$
$r_{12} = 10$, $r_{13} = 11$

- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{4,5\}$
$r_{24} = 8$ $r_{25} = 8$

- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{2,5\}$
$r_{32} = 11$ $r_{35} = 11$

- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{6\}$
$r_{46} = 5$

- ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
$r_{57} = 4$

TROVATO CAMMINO 1-2-5-7

$$\delta = \min\{10, 8, 4\} = 4$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{12} = 0+4 = 4$ $\quad r_{12} = 10-4 = 6$ $\quad r_{21} = 0+4 = 4$
$x_{25} = 0+4 = 4$ $\quad r_{25} = 8-4 = 4$ $\quad r_{52} = 0+4 = 4$
$x_{57} = 0+4 = 4$ $\quad r_{57} = 4-4 = 0$ $\quad r_{75} = 0+4 = 4$

– SECONDO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

- ESTRAGGO 1. $FC(1)=\{2,3\}$
  $r_{12}=6$, $r_{13}=11$
- ESTRAGGO 2. $FC(2)=\{4,5\}$
  $r_{24}=8$ $\quad r_{25}=4$
- ESTRAGGO 3. $FC(3)=\{2,5\}$
  $r_{32}=11$ $\quad r_{35}=11$
- ESTRAGGO 4. $FC(4)=\{6\}$
  $r_{46}=5$
- ESTRAGGO 5. $FC(5)=\{7\}$
  $r_{57}=0 \longrightarrow$ SCARTO
- ESTRAGGO 6. $FC(5)=\{5\}$
  $r_{65}=5 \longleftarrow$ GIÀ MESSO PRIMA

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
	~~2~~
~~1~~	~~3~~
	~~4~~
~~2~~	~~5~~
~~3~~	
~~4~~	~~6~~
~~5~~	
6	

FINE!

$N_s=\{1,2,3,4,5,6\}$

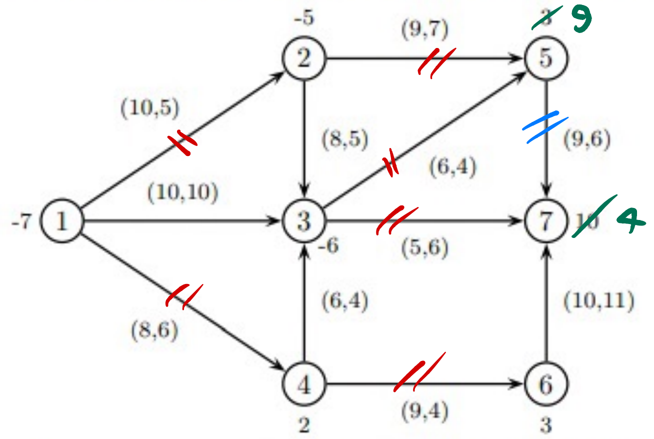
$\Downarrow$

$N_t=\{7\}$

$$\bar{x}=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} \overset{12}{4} & \overset{13}{0} & \overset{24}{0} & \overset{25}{4} & \overset{32}{0} & \overset{35}{0} & \overset{46}{0} & \overset{57}{4} & \overset{65}{0} & \overset{76}{0} & \overset{v}{4} \end{pmatrix}$$

$v=4$

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (3,7) e (4,6), l'arco (5,7) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato e dire se é di base e se sí quale é la base. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

$T = \{(1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (3,7), (4,6)\}$

$U = \{(5,7)\}$ $\qquad L = \{(1,3), (2,3), (4,3), (6,7)\}$

PONGO I PRIMI VALORI RELATIVI AD L E U (ARCHI VUOTI E SATURI)

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \bar{x} = & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \bar{w} = & & 10 & & 5 & & & & 4 & & 0 & 11 \end{array}$$

SVOLGO LA VISITA POSTICIPATA PER FOGLIE, MA PRIMA AGGIORNIAMO I BILANCI

$b_5 = 3 + 6 = 9 \qquad b_7 = 10 - 6 = 4$

- NODO 6: $x_{46} = 3$ $\qquad$ $w_{46} = 4 - 3 = 1$
- NODO 4: $x_{14} = 5$ $\qquad$ $w_{14} = 6 - 5 = 1$
- NODO 7: $x_{37} = 4$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $w_{37} = 6 - 4 = 2$
- NODO 3: $x_{35} = 2$ $\qquad$ $w_{35} = 5 - 2 = 3$
- NODO 5: $x_{25} = 7$ $\qquad$ $w_{25} = 7 - 7 = 0$
- NODO 2: $x_{12} = 2$ $\qquad$ $w_{12} = 5 - 2 = 3$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \bar{x} = & 2 & 0 & 5 & 0 & 7 & 2 & 4 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \bar{w} = & 3 & 10 & 1 & 5 & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 11 \end{array}$$

IL FLUSSO OTTENUTO É DEGENERE: L'ARCO $(2,5) \in T$ É SATURO

PER LA VERIFICA DELL'OTTIMO CALCOLO IL POTENZIALE (VISITA ANTICIPATA DELLA RADICE)

$\pi_1 = 0$

$-\pi_1 + \pi_2 = 10 \longrightarrow \pi_2 = 10$

$-\pi_1 + \pi_4 = 8 \longrightarrow \pi_4 = 10$

$-\pi_2 + \pi_5 = 9 \longrightarrow \pi_5 = 19$

$-\pi_3 + \pi_5 = 8 \longrightarrow \pi_3 = 11$

$-\pi_3 + \pi_7 = 5 \longrightarrow \pi_7 = 16$

$$-\tilde{\pi}_4 + \tilde{\pi}_6 = 9 \longrightarrow \tilde{\pi}_6 = 19$$

$$\tilde{\pi} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \end{array}$$
$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 11 & 10 & 19 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$

$$c_{13}^{\tilde{\pi}} = 10 + 0 - 11 = -1$$ X DOVREBBE ESSERE POSITIVO PER BELLMAN CAPACITATO

APPLICO IL SIMPLESSO

PRENDO L'ARCO (1,3) COME ARCO ENTRANTE, PRIMO (ORDINE LESSICOGRAFICO) CHE NON RISPETTA BELLMAN CAPACITATO

CICLO 1-2-5-3

$C^+ = \{(1,3), (3,5)\}$ $\quad C^- = \{(1,2), (2,5)\}$

$x_{13} = 0$ $\quad x_{35} = 2$ $\quad x_{12} = 2$ $\quad x_{25} = 7$

$u_{13} = 10$ $\quad u_{35} = 4$

$\theta^- = \min\{2,7\} = 2$

$\theta^+ = \min\{10, 4-2\} = 2$

$\theta^+ = \theta^- = 2$, PRENDO L'ARCO (1,2) PER L'ORDINE LESSICOGRAFICO

AGGIORNO IL FLUSSO

$x_{13} = 0 + 2$ $\quad w_{13} = 10 - 2 = 8$

$x_{35} = 2 + 2 = 4$ $\quad w_{35} = 4 - 4 = 0$

$x_{12} = 2 - 2 = 0$ $\quad w_{12} = 3 + 2 = 5$

$x_{25} = 7 - 2 = 5$ $\quad w_{25} = 0 + 2 = 2$

$$\begin{array}{c} \\ \bar{x} = \end{array} \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \end{array}$$
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 0 & 5 & 4 & 4 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ \end{array}$$
$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 5 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

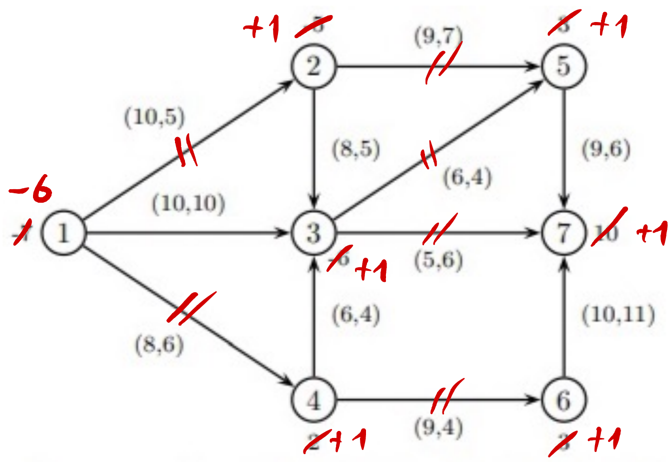
CAMMINI MINIMI

INIZIALIZZO I VETTORI

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$
$$\tilde{\pi} = (0, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty)$$

$$p = (1; -1; -1; -1; -1; -1; -1)$$

E APPLICO DIJKSTRA



1. ESTRAGGO IL NODO 1 $\quad FC(1)=\{2,3,4\}$

$$\begin{array}{lll} \tilde\pi_2 > \tilde\pi_1 + c_{12} \longrightarrow +\infty > 10 & \tilde\pi_2 = 10 & p_2 = 1 \\ \tilde\pi_3 > \tilde\pi_1 + c_{13} \longrightarrow +\infty > 10 & \tilde\pi_3 = 10 & p_3 = 1 \\ \tilde\pi_4 > \tilde\pi_1 + c_{14} \longrightarrow +\infty > 8 & \tilde\pi_4 = 8 & p_4 = 1 \end{array}$$

$$\tilde\pi = (\overset{1}{0}, \overset{2}{10}, \overset{3}{10}, \overset{4}{8}, \overset{5}{+\infty}, \overset{6}{+\infty}, \overset{7}{+\infty}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; -1; -1; -1)$$

2. ESTRAGGO IL NODO 4 $\quad FC(4)=\{3,6\}$

$$\begin{array}{lll} \tilde\pi_3 > \tilde\pi_4 + c_{43} \longrightarrow 10 > 8+6 & & \\ \tilde\pi_6 > \tilde\pi_4 + c_{46} \longrightarrow +\infty > 8+9 & \tilde\pi_6 = 17 & p_6 = 4 \end{array}$$

$$\tilde\pi = (\overset{1}{0}, \overset{2}{10}, \overset{3}{10}, \overset{4}{8}, \overset{5}{+\infty}, \overset{6}{17}, \overset{7}{+\infty}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; -1; 4; -1)$$

3. ESTRAGGO IL NODO 2 $\quad FC(2)=\{3,5\}$

$$\begin{array}{lll} \tilde\pi_3 > \tilde\pi_2 + c_{23} \longrightarrow 10 > 10+8 & & \\ \tilde\pi_5 > \tilde\pi_2 + c_{25} \longrightarrow +\infty > 10+9 & \tilde\pi_5 = 19 & p_5 = 2 \end{array}$$

$$\tilde\pi = (\overset{1}{0}, \overset{2}{10}, \overset{3}{10}, \overset{4}{8}, \overset{5}{19}, \overset{6}{17}, \overset{7}{+\infty}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; 2; 4; -1)$$

4. ESTRAGGO IL NODO 3 $\quad FC(3)=\{5,7\}$

$$\begin{array}{lll} \tilde\pi_5 > \tilde\pi_3 + c_{35} \longrightarrow 19 > 10+6 & \tilde\pi_5 = 16 & p_5 = 3 \\ \tilde\pi_7 > \tilde\pi_3 + c_{37} \longrightarrow +\infty > 10+5 & \tilde\pi_7 = 15 & p_7 = 3 \end{array}$$

$$\tilde\pi = (\overset{1}{0}, \overset{2}{10}, \overset{3}{10}, \overset{4}{8}, \overset{5}{16}, \overset{6}{17}, \overset{7}{15}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; 3; 4; 3)$$

5. ESTRAGGO IL NODO 7 $\quad FC(3)=\{\emptyset\}$

6. ESTRAGGO IL NODO 5 $\quad FC(3)=\{7\}$

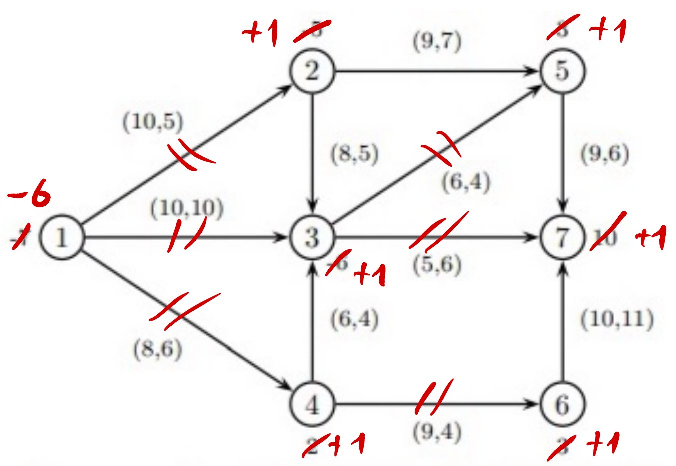
$$\tilde\pi_7 > \tilde\pi_5 + c_{57} \longrightarrow 15 > 16+9$$

6. ESTRAGGO IL NODO 6 $\quad FC(6)=\{7\}$

$$\tilde\pi_7 > \tilde\pi_6 + c_{67} \longrightarrow 15 > 17+10$$

OTTENIAMO L'ALBERO SULLA DESTRA

$$\bar{x} = (1\ 3\ 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$$



FLUSSO MASSIMO (TAGLIO DA 1 A 6)

- INIZIALIZZAZIONE

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 7 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$r_{ij} = u_{ij}$ ALL'INIZIO.

- PRIMO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

  - ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
    $r_{12} = 5$, $r_{13} = 10$, $r_{14} = 6$
  - ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
    $r_{23} = 5$ $\quad r_{25} = 7$
  - ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
    $r_{35} = 4$ $\quad r_{37} = 6$
  - ESTRAGGO 4. $FC(3) = \{3,6\}$
    $r_{43} = 4$ $\quad r_{46} = 4$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~2~~ ~~3~~ ~~4~~
~~2~~	5
~~3~~	7
~~4~~	6

TROVATO CAMMINO 1-4-6.

$$\delta = \min\{6, 4\} = 4$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

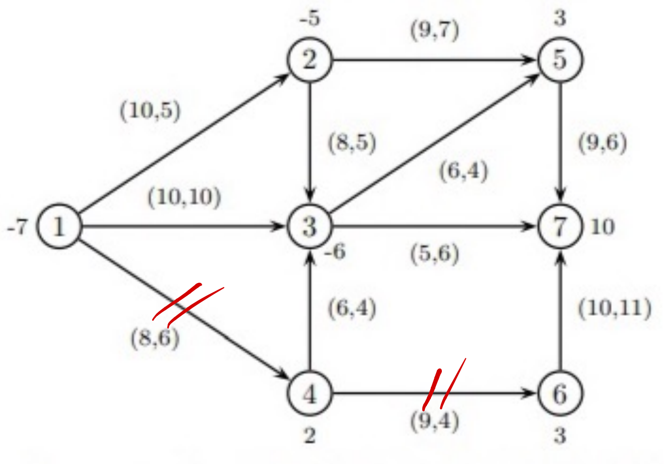
$x_{14} = 0+4 = 4$ $\quad r_{14} = 10 - 4 = 6$ $\quad r_{41} = 0+4 = 4$
$x_{46} = 0+4 = 4$ $\quad r_{46} = 4 - 4 = 0$ $\quad r_{64} = 0+4 = 4$

- SECONDO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

  - ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
    $r_{12} = 5$, $r_{13} = 6$, $r_{14} = 6$
  - ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
    $r_{23} = 5$ $\quad r_{25} = 7$
  - ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
    $r_{35} = 4$ $\quad r_{37} = 6$
  - ESTRAGGO 4. $FC(3) = \{3,6\}$
    $r_{43} = 4$ $\quad r_{46} = 0 \longrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$ $\quad r_{57} = 6$
  - ESTRAGGO 7. $FC(7) = \{\emptyset\}$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~2~~ ~~3~~ ~~4~~
~~2~~	~~5~~
~~3~~	~~7~~
~~4~~	
~~5~~	
7	

FINE!



$v = 4$ UNICO δ

$$\bar{x} = \left(\begin{array}{cccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 & v \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~2~~ ~~3~~ ~~4~~
~~2~~	~~5~~
~~3~~	~~7~~
~~4~~	
~~5~~	
7	

FINE!

$N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$\Downarrow$

$N_t = \{6\}$

FLUSSO MASSIMO (TAGLIO DA 1 A 7)

EXTRA PERCHÉ ~~SONO BRAVO~~ SONO SCEMO

- INIZIALIZZAZIONE

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 7 & 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$r_{ij} = u_{ij}$ ALL'INIZIO.

- PRIMO PASSO

CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 5, \quad r_{13} = 10, \quad r_{14} = 6$
- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
  $r_{23} = 5 \quad r_{25} = 7$
- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 4 \quad r_{37} = 6$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
	~~2~~
~~1~~	~~3~~
	4
~~2~~	5
~~3~~	7

TROVATO CAMMINO 1-3-7.

$$\delta = \min\{10, 6\} = 6$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{13} = 0 + 6 = 6 \qquad r_{13} = 10 - 6 = 4 \qquad r_{31} = 0 + 4 = 4$

$x_{37} = 0 + 6 = 6 \qquad r_{37} = 6 - 6 = 0 \qquad r_{73} = 0 + 6 = 6$

- SECONDO PASSO

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 5, \quad r_{13} = 4, \quad r_{14} = 6$
- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
  $r_{23} = 5 \quad r_{25} = 7$
- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 4 \quad r_{37} = 0$
  ↳ SCARTO
- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
  $r_{43} = 4 \quad r_{46} = 4$
- ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
  $r_{57} = 6$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~2~~
	~~3~~
	~~4~~
~~2~~	~~5~~
~~3~~	??
~~4~~	6
5	7

TROVATO CAMMINO 1-2-5-7

$\delta = \min\{5,7,6\} = 5$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{12} = 0+5 = 5$	$r_{12} = 5-5 = 0$	$r_{21} = 0+5 = 5$
$x_{25} = 0+5 = 5$	$r_{25} = 7-5 = 2$	$r_{52} = 0+5 = 5$
$x_{57} = 0+5 = 5$	$r_{57} = 6-5 = 1$	$r_{75} = 0+5 = 5$

- TERZO PASSO.

  - ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
    $r_{12} = 0$, $r_{13} = 4$, $r_{14} = 6$
    $\hookrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
    $r_{35} = 4$ $\quad r_{37} = 0$
    $\hookrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
    $r_{43} = 4$ $\quad r_{46} = 4$
  - ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
    $r_{57} = 1$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
	~~3~~
~~1~~	~~4~~
~~3~~	~~5~~
~~4~~	6
5	7

TROVATO CAMMINO 1-3-5-7

$\delta = \min\{4,4,1\} = 1$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{13} = 6+1 = 7$	$r_{13} = 4-1 = 3$	$r_{31} = 4+1 = 5$
$x_{35} = 0+1 = 1$	$r_{35} = 4-1 = 3$	$r_{53} = 0+1 = 1$
$x_{57} = 5+1 = 6$	$r_{57} = 1-1 = 0$	$r_{75} = 5+1 = 6$

- QUARTO PASSO

  - ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
    $r_{12} = 0$, $r_{13} = 4$, $r_{14} = 6$
    $\hookrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
    $r_{35} = 4$ $\quad r_{37} = 0 \longrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
    $r_{43} = 4$ $\quad r_{46} = 4$
  - ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
    $r_{57} = 0 \longrightarrow$ SCARTO
  - ESTRAGGO 6. $FC(6) = 7$ $\quad r_{67} = 11$

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
	~~3~~
~~1~~	~~4~~
~~3~~	~~5~~
~~4~~	~~6~~
~~5~~	??
~~6~~	7

TROVATO CAMMINO 1 - 4 - 6 - 7

$\delta = \min\{6, 4, 11\} = 4$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{14} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{14} = 6-4 = 2$
$x_{46} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{46} = 4-4 = 0$
$x_{67} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{67} = 11-4 = 7$

- QUINTO PASSO

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 0$, $r_{13} = 4$, $r_{14} = 2$
  $\hookrightarrow$ SCARTO
- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 4$ $\qquad r_{37} = 0 \longrightarrow$ SCARTO
- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
  $r_{43} = 4$ $\qquad r_{46} = 0 \longrightarrow$ SCARTO
- ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
  $r_{57} = 0 \longrightarrow$ SCARTO

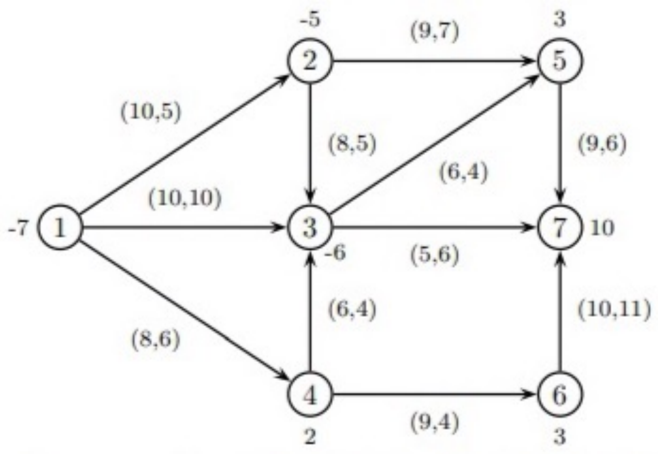
NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~3~~
~~3~~	~~4~~
4	~~5~~
~~5~~	??
	??

FINE!

$N_s = \{1,3,4,5\}$

$\Downarrow$

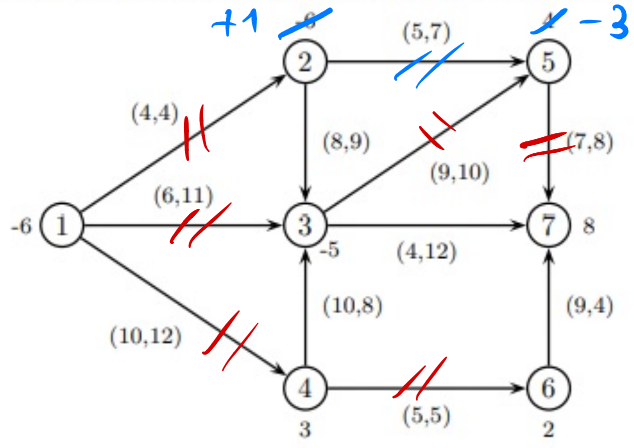
$N_t = \{2,6,7\}$



$v = 6+5+1+4 = 16$

$$\bar{x} = \begin{array}{cccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 & v \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 5 & 7 & 4 & 0 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 6 & 4 & 16 \end{array} \right)$$

Esercizio 3. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Scegliendo come albero di copertura $T = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (3,5)\ (4,6)\ (5,7)\}$, l'arco $(2,5)$ come arco di U ed i rimanenti in L, il flusso é ottimo? Se no, trovarne uno migliore. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6 ed il taglio da 1 a 7 di capacitá minima della rete.

$\boxed{\text{CAMMINO MINIMO DA 1 A 6: UNICO PERCORSO POSSIBILE È } 1-4-6}$

$T = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,5), (4,6), (5,7)\}$

$U = \{(2,5)\}$ $\quad L = \{(2,3), (3,7), (4,3), (6,7)\}$

PONGO I PRIMI VALORI RELATIVI AD L E U (ARCHI VUOTI E SATURI)

$$\bar{X} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ & & & 0 & 7 & & 0 & 0 & & & 0 \end{array}$$

$$\bar{W} = \begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ & & & 9 & 0 & & 12 & 8 & & & 4 \end{array}$$

SVOLGO LA VISITA POSTICIPATA PER FOGLIE, MA PRIMA AGGIORNIAMO I BILANCI

$b_2 = -6+7 = +1$ $\qquad b_5 = 4-7 = -3$

- NODO 6: $X_{46} = 2$ $\qquad W_{46} = 5-2 = 3$
- NODO 4: $X_{14} = 5$ $\qquad W_{14} = 12-5 = 7$
- NODO 7: $X_{57} = 8$ $\Longrightarrow$ $W_{57} = 8-8 = 0$ $\longrightarrow$ FLUSSO DI BASE DEGENERE
- NODO 5: $X_{35} = 5$ $\qquad W_{35} = 9-5 = 4$
- NODO 3: $X_{13} = 0$ $\qquad W_{13} = 11-0 = 11$ $\longrightarrow$
- NODO 2: $X_{12} = 1$ $\qquad W_{12} = 4-1 = 3$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 3 & 11 & 7 & 9 & 0 & 4 & 12 & 8 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

PER LA VERIFICA DELL'OTTIMO CALCOLO IL POTENZIALE (VISITA ANTICIPATA DELLA RADICE)

$\pi_1 = 0$

$-\pi_1 + \pi_2 = 4 \longrightarrow \pi_2 = 4$

$-\pi_1 + \pi_3 = 6 \longrightarrow \pi_3 = 6$

$-\pi_1 + \pi_4 = 10 \longrightarrow \pi_4 = 10$

$-\pi_3 + \pi_5 = 9 \longrightarrow \pi_5 = 15$

$-\pi_5 + \pi_7 = 7 \longrightarrow \pi_7 = 22$

$$-\tilde{\pi}_4 + \tilde{\pi}_6 = 5 \longrightarrow \tilde{\pi}_6 = 15$$

$$\tilde{\pi} = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$
$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 10 & 15 & 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$c_{23}^{\tilde{\pi}} = 8 - 2 = 6$$

$$c_{25}^{\tilde{\pi}} = 5 - 11 = -6$$

$$c_{37}^{\tilde{\pi}} = 4 - 16 = -12$$ X DOVREBBE ESSERE POSITIVO PER BELLMAN CAPACITATO

APPLICO IL SIMPLESSO

PRENDO L'ARCO (3,7) COME ARCO ENTRANTE, PRIMO (ORDINE LESSICOGRAFICO) CHE NON RISPETTA BELLMAN CAPACITATO

CICLO 3-5-7

$$C^+ = \{(3,7)\} \qquad C^- = \{(3,5),(5,7)\}$$

$x_{37} = 0$, $u_{37} = 12$ $\qquad$ $x_{35} = 5$ $\qquad$ $x_{57} = 8$

$$\theta^+ = 12 - 0 = 12 \qquad \theta^- = \min\{5, 8\} = 5$$

$$\theta = \min\{12, 5\} = 5 \implies (3,5) \text{ ARCO USCENTE}$$

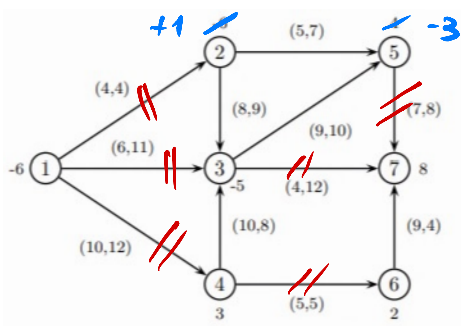
AGGIORNO IL FLUSSO

$$x_{37} = 0 + 5 = 5 \qquad w_{37} = 12 - 5 = 7$$
$$x_{35} = 5 - 5 = 0 \qquad w_{35} = 4 + 5 = 9$$
$$x_{57} = 8 - 5 = 3 \qquad w_{57} = 0 + 5 = 5$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 3 & 11 & 7 & 9 & 0 & 9 & 7 & 8 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

AGGIORNO IL POTENZIALE



$$\tilde{\pi}_1 = 0$$
$$\tilde{\pi}_2 = 4 \quad \tilde{\pi}_3 = 6 \quad \tilde{\pi}_4 = 10$$
$$-\tilde{\pi}_5 + \tilde{\pi}_7 = 7 \longrightarrow \tilde{\pi}_5 = 3$$
$$-\tilde{\pi}_3 + \tilde{\pi}_7 = 4 \longrightarrow \tilde{\pi}_7 = 10$$
$$-\tilde{\pi}_4 + \tilde{\pi}_6 = 5 \longrightarrow \tilde{\pi}_6 = 15$$

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 10 & 3 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$c_{23}^{\tilde{\pi}} = 8 - 2 = 6$

$c_{25}^{\tilde{\pi}} = 5 + 1 = 6$ X BELLMAN PER RETI CAPACITATE NON RISPETTATO

NON SIAMO ANCORA ALL'OTTIMO

APPLICO IL SIMPLESSO

PRENDO L'ARCO (2,5) COME ARCO ENTRANTE, PRIMO (ORDINE LESSICOGRAFICO) CHE NON RISPETTA BELLMAN CAPACITATO

CICLO 1-3-7-5-2

$C^- = \{(2,5), (5,7), (1,2)\}$ $\quad C^+ = \{(3,7), (1,3)\}$

$x_{25} = 7$ $\quad x_{57} = 5$ $\quad x_{12} = 1$ $\quad x_{37} = 5$, $u_{37} = 12$ $\quad x_{13} = 0$, $u_{13} = 11$

$\theta^- = \min\{7, 5, 1\} = 1$ $\quad \theta^+ = \min\{12-5, 11\} = 7$

$\theta = \min\{1, 7\} = 1 \implies (1,2)$ ARCO USCENTE

AGGIORNO IL FLUSSO

$x_{25} = 7 - 1 = 6$ $\quad w_{25} = 0+1 = 1$

$x_{57} = 5 - 1 = 4$ $\quad w_{57} = 5+1 = 6$

$x_{12} = 1 - 1 = 0$ $\quad w_{12} = 3+1 = 4$

$x_{37} = 5+1 = 6$ $\quad w_{37} = 7-1 = 6$

$x_{13} = 0+1 = 1$ $\quad w_{13} = 11 - 1 = 10$

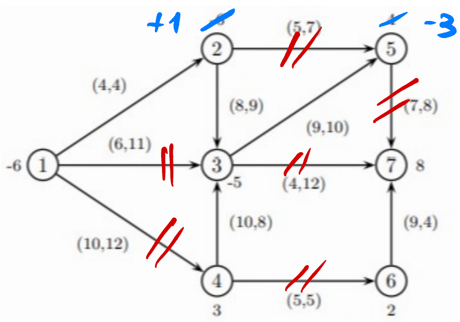
$\bar{x} =$

12	13	14	23	25	35	37	43	46	57	67
0	1	5	0	6	0	6	0	2	4	0

$\bar{w} =$

12	13	14	23	25	35	37	43	46	57	67
4	10	7	9	1	9	6	8	3	6	4

AGGIORNO IL POTENZIALE



$\tilde{\pi}_1 = 0$

$\tilde{\pi}_3 = 6$ $\quad \tilde{\pi}_4 = 10$

$-\tilde{\pi}_4 + \tilde{\pi}_6 = 5 \rightarrow \tilde{\pi}_6 = 15$

$-\tilde{\pi}_3 + \tilde{\pi}_7 = 4 \rightarrow \tilde{\pi}_7 = 10$

$-\tilde{\pi}_5 + \tilde{\pi}_7 = 7 \rightarrow \tilde{\pi}_5 = 3$

$-\tilde{\pi}_2 + \tilde{\pi}_3 = 5 \rightarrow \tilde{\pi}_2 = 1$

$\tilde{\pi} =$

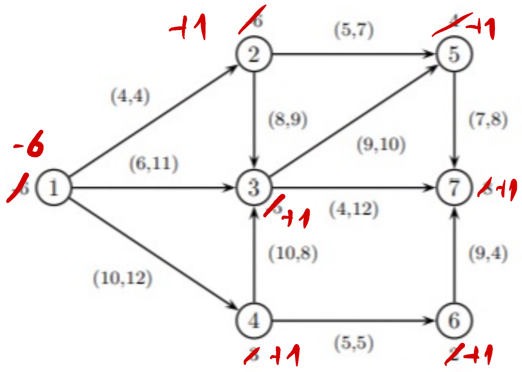
1	2	3	4	5	6	7
0	1	6	10	3	15	10

$c_{23}^{\tilde{\pi}} = 8 + 5 = 13$

$c_{35}^{\tilde{\pi}} = 9 + 3 = 12$

$c_{43}^{\tilde{\pi}} = 10 + 4 = 14$ $\quad c_{67}^{\tilde{\pi}} = 9 + 5 = 14$ OTTIMO!!!

CAMMINI MINIMI



INIZIALIZZO I VETTORI

$$\tilde{\pi} = (\overset{1}{0}, \overset{2}{+\infty}, \overset{3}{+\infty}, \overset{4}{+\infty}, \overset{5}{+\infty}, \overset{6}{+\infty}, \overset{7}{+\infty})$$

$$p = (1; -1; -1; -1; -1; -1; -1)$$

E APPLICO DIJKSTRA

1. ESTRAGGO IL NODO 1 $\quad FC(1) = \{2,3,4\}$

$$\tilde{\pi}_2 > \tilde{\pi}_1 + c_{12} \longrightarrow +\infty > 4 \qquad \tilde{\pi}_2 = 4 \quad p_2 = 1$$
$$\tilde{\pi}_3 > \tilde{\pi}_1 + c_{13} \longrightarrow +\infty > 6 \qquad \tilde{\pi}_3 = 6 \quad p_3 = 1$$
$$\tilde{\pi}_4 > \tilde{\pi}_1 + c_{14} \longrightarrow +\infty > 10 \qquad \tilde{\pi}_4 = 10 \quad p_4 = 1$$

$$\tilde{\pi} = (\overset{1}{0}, \overset{2}{4}, \overset{3}{6}, \overset{4}{10}, \overset{5}{+\infty}, \overset{6}{+\infty}, \overset{7}{+\infty}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; -1; -1; -1)$$

2. ESTRAGGO IL NODO 2 $\quad FC(2) = \{3,5\}$

$$\tilde{\pi}_3 > \tilde{\pi}_2 + c_{23} \longrightarrow 6 > 4+8$$
$$\tilde{\pi}_5 > \tilde{\pi}_2 + c_{25} \longrightarrow +\infty > 4+5 \qquad \tilde{\pi}_5 = 9 \quad p_5 = 2$$

$$\tilde{\pi} = (\overset{1}{0}, \overset{2}{4}, \overset{3}{6}, \overset{4}{10}, \overset{5}{9}, \overset{6}{+\infty}, \overset{7}{+\infty}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; 2; -1; -1)$$

3. ESTRAGGO IL NODO 3 $\quad FC(3) = \{5,7\}$

$$\tilde{\pi}_5 > \tilde{\pi}_3 + c_{35} \longrightarrow 9 > 6+9$$
$$\tilde{\pi}_7 > \tilde{\pi}_3 + c_{37} \longrightarrow +\infty > 6+4 \qquad \tilde{\pi}_7 = 10 \quad p_7 = 3$$

$$\tilde{\pi} = (\overset{1}{0}, \overset{2}{4}, \overset{3}{6}, \overset{4}{10}, \overset{5}{9}, \overset{6}{+\infty}, \overset{7}{10}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; 2; -1; 3)$$

4. ESTRAGGO IL NODO 5 $\quad FC(5) = \{7\}$

$$\tilde{\pi}_7 > \tilde{\pi}_5 + c_{57} \longrightarrow 10 > 9+7$$

5. ESTRAGGO IL NODO 4 $\quad FC(4) = \{3,6\}$

$$\tilde{\pi}_3 > \tilde{\pi}_4 + c_{43} \longrightarrow 6 > 10+10$$
$$\tilde{\pi}_6 > \tilde{\pi}_4 + c_{46} \longrightarrow +\infty > 10+5 \qquad \tilde{\pi}_6 = 15 \quad p_6 = 4$$

$$\tilde{\pi} = (\overset{1}{0}, \overset{2}{4}, \overset{3}{6}, \overset{4}{10}, \overset{5}{9}, \overset{6}{15}, \overset{7}{10}) \qquad p = (1; 1; 1; 1; 2; 4; 3)$$

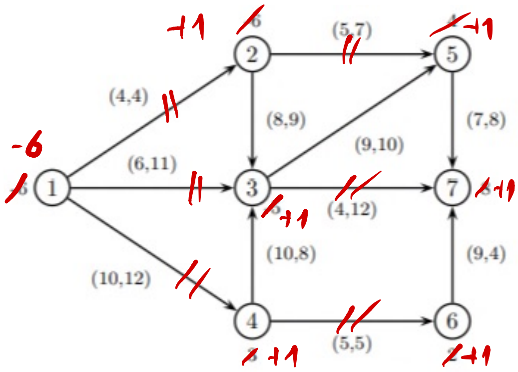
6. ESTRAGGO IL NODO 7 $\quad FC(7) = \{\emptyset\}$

7. ESTRAGGO IL NODO 6 $FC(6) = \{7\}$

$\pi_7 > \pi_6 + c_{67} \longrightarrow 10 > 15 + 9$

OTTENIAMO L'ALBERO SULLA DESTRA

$\bar{x} = (2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$



FLUSSO MASSIMO (TAGLIO DA 1 A 7)

- INIZIALIZZAZIONE

$$\bar{r} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccccccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 \\ 4 & 11 & 12 & 9 & 7 & 10 & 12 & 8 & 5 & 8 & 4 \end{array}$$

$r_{ij} = u_{ij}$ ALL'INIZIO.

- PRIMO PASSO

CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
	~~2~~
~~1~~	~~3~~
	4
~~2~~	5
~~3~~	7

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 4, \quad r_{13} = 11, \quad r_{14} = 12$
- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
  $r_{23} = 9 \quad r_{25} = 7$
- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 10 \quad r_{37} = 12$

TROVATO CAMMINO 1-3-7.

$\delta = \min\{11, 12\} = 11$

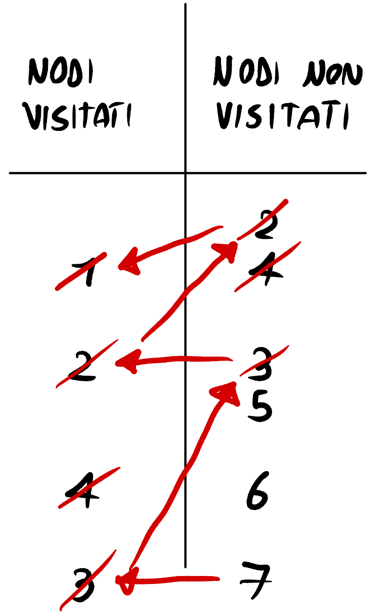
AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{13} = 0 + 11 = 11 \qquad r_{13} = 11 - 11 = 0 \qquad r_{31} = 0 + 11 = 11$

$x_{37} = 0 + 11 = 11 \qquad r_{37} = 12 - 11 = 1 \qquad r_{73} = 0 + 11 = 11$

– SECONDO PASSO

CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE



- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 4$, $r_{13} = 0$, $r_{14} = 12$
  ↳ SCARTO

- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
  $r_{23} = 9$ $r_{25} = 7$

- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
  $r_{43} = 8$ $r_{46} = 5$

- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 10$ $r_{37} = 1$.

TROVATO CAMMINO 1-2-3-7

$$\delta = \min\{4, 9, 1\} = 1$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

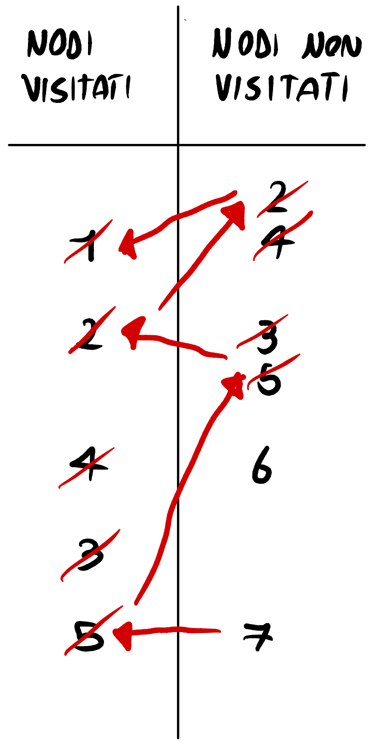
$x_{12} = 0 + 1 = 1$ $\quad r_{12} = 4 - 1 = 3$ $\quad r_{21} = 0 + 1 = 1$

$x_{23} = 0 + 1 = 1$ $\quad r_{23} = 9 - 1 = 8$ $\quad r_{32} = 0 + 1 = 1$

$x_{37} = 11 + 1 = 12$ $\quad r_{37} = 1 - 1 = 0$ $\quad r_{73} = 11 + 1 = 12$

– SECONDO PASSO

CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE



- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $r_{12} = 3$, $r_{13} = 0$, $r_{14} = 12$
  ↳ SCARTO

- ESTRAGGO 2. $FC(2) = \{3,5\}$
  $r_{23} = 8$ $r_{25} = 7$

- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
  $r_{43} = 8$ $r_{46} = 5$

- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 10$ $r_{37} = 0$

- ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
  $r_{57} = 8$

TROVATO CAMMINO 1-2-5-7

$$\delta = \min\{3, 7, 8\} = 3$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{12} = 1+3 = 4$ $\qquad r_{12} = 3-3 = 0$ $\qquad r_{21} = 1+3 = 4$

$x_{25} = 0+3 = 3$ $\qquad r_{25} = 7-3 = 4$ $\qquad r_{52} = 0+3 = 3$

$x_{57} = 0+3 = 3$ $\qquad r_{57} = 8-3 = 5$ $\qquad r_{75} = 0+3 = 3$

– TERZO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~4~~
~~4~~	~~3~~ ~~6~~
~~3~~	5
~~6~~	7

– ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
$r_{12} = 0, \quad r_{13} = 0, \quad r_{14} = 12$
→ SCARTO

– ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
$r_{43} = 8 \qquad r_{46} = 5$

– ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
$r_{35} = 10 \qquad r_{37} = 0$

– ESTRAGGO 6. $FC(6) = \{7\}$
$r_{67} = 4$

TROVATO CAMMINO 1 – 4 – 6 – 7

$$\delta = \min\{12, 5, 4\} = 4$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{14} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{14} = 12-4 = 8$ $\qquad r_{41} = 0+4 = 4$

$x_{46} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{46} = 5-4 = 1$ $\qquad r_{46} = 0+4 = 4$

$x_{67} = 0+4 = 4$ $\qquad r_{67} = 4-4 = 0$ $\qquad r_{67} = 0+4 = 4$

– QUARTO PASSO
CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~4~~
~~4~~	~~3~~ ~~6~~
~~3~~	~~5~~
~~6~~	
~~5~~	7

– ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
$r_{12} = 0, \quad r_{13} = 0, \quad r_{14} = 8$
→ SCARTO

– ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
$r_{43} = 8 \qquad r_{46} = 1$

– ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
$r_{35} = 10 \qquad r_{37} = 0$

– ESTRAGGO 6. $FC(6) = \{7\}$
$r_{67} = 0$

– ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
$r_{57} = 5$

TROVATO CAMMINO $1-4-3-5-7$

$$\delta = \min\{8, 8, 10, 5\} = 5$$

AGGIORNO IL FLUSSO SUL CAMMINO

$x_{14} = 4+5 = 9$	$r_{14} = 8-5 = 3$	$r_{41} = 4+5 = 9$
$x_{43} = 0+5 = 5$	$r_{43} = 8-5 = 3$	$r_{34} = 0+5 = 5$
$x_{35} = 0+5 = 5$	$r_{35} = 10-5 = 5$	$r_{53} = 0+5 = 5$
$x_{57} = 3+5 = 8$	$r_{57} = 5-5 = 0$	$r_{75} = 3+5 = 8$

– QUARTO PASSO

CERCO IL CAMMINO AUMENTANTE

- ESTRAGGO 1. $FC(1) = \{2,3,4\}$
  $\underbrace{r_{12} = 0, \quad r_{13} = 0}_{\text{SCARTO}}, \quad r_{14} = 3$
- ESTRAGGO 4. $FC(4) = \{3,6\}$
  $r_{43} = 3 \qquad r_{46} = 1$
- ESTRAGGO 3. $FC(3) = \{5,7\}$
  $r_{35} = 5 \qquad r_{37} = 0$
- ESTRAGGO 6. $FC(6) = \{7\}$
  $r_{67} = 0$
- ESTRAGGO 5. $FC(5) = \{7\}$
  $r_{57} = 0 \rightarrow$ SCARTO

NODI VISITATI	NODI NON VISITATI
~~1~~	~~4~~
~~4~~	~~3~~
	~~6~~
~~3~~	~~5~~
~~6~~	
~~5~~	FINE !

$$N_S = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$v = 4+3+1+11+5 = 24$$

$$\bar{x} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 25 & 35 & 37 & 43 & 46 & 57 & 67 & v \\ 4 & 11 & 9 & 1 & 3 & 5 & 12 & 5 & 4 & 8 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$